安徽大学 2025 年 – 2026 学年第 2 学期

《计量经济学（初级）（双语）》（期中考试试题参考答案及评分标准）

一、辨析题（共 3 题，每题 10 分）

判断以下命题是否正确，并简要阐述理由:

1. 在计量经济模型中，随机扰动项与残差项无区别。

   参考答案.
   错误。随机扰动项是在建立计量经济模型中设定的不能为模型解释的随机项，而残差在对计量经济学模型估计后，模型的估计值和观测值的差值。 □

2. 如果拟合优度接近1，则说明模型设定一定很好。

   参考答案.
   错误。未经调整的拟合优度（R^2）关于回归模型中的变量个数 k 不减（non-decreasing），因此回归变量个数的增加会导致过拟合问题。同时，拟合优度度量的仅仅是样本回归函数对总体回归函数拟合（逼近）的好坏，评价模型设定还需要充分回归模型的经济学含义和应用情境。 □

3. 在一元线性回归模型中, 如果 $\operatorname{Cov}(X, u_i) = 0$，且对于随机扰动项 $\mathrm{E}(u_i) = 0$，则 $\mathrm{E}(u_i \mid X) = 0$。

   参考答案.
   错误。 $\operatorname{Cov}(X, u_i) = 0$ 的条件弱于 $\mathrm{E}(u_i \mid X) = 0$。 □

二、填空题（共 5 题，每题 4 分）

1. 假设对于 IID 样本 $\{(X_i, Y_i), i = 1, \cdots, n\}$ 有如下模型,

   $$Y_i = c_0 + c_1 X_i + c_2 X_i^2 + u_i$$

   且 $\mathrm{E}(u_i \mid X_i) = 0$. 定义总体回归函数（population regression function）为 $m(x) = \mathrm{E}(Y_i \mid X_i = x)$, $\mu_x = \mathrm{E}(X_i)$, 则 $\mathrm{E}[\partial m(X_i)/\partial X_i]$ 为 ____________。

   参考答案.

   $$\mathrm{E}\left[\frac{\partial m(X_i)}{\partial X_i}\right] = \mathrm{E}[c_1 + 2c_2 X_i] = c_1 + 2c_2\mu_x.$$

   □

2. 用OLS 估计经典一元线性回归模型 $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i$，则样本回归直线一定通过____________。

   参考答案.
   $(\bar{X}, \bar{Y})$ □

3. 考虑满足经典假定的一元线性回归模型 $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i, u_i \sim \mathrm{IID}(0, \sigma^2)$. 记 $x_i = X_i - \bar{X}$, 则在给定解释变量样本 $\{X_i\}$ 的条件下， OLS 估计量 $\hat{\beta}_1$ 的方差为____________。

参考答案.

$$\mathrm{Var}\left(\hat{\beta}_1 \mid X\right) = \sum \left(\frac{x_i}{\sum x_i^2}\right)^2 \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}.$$

□

4. 多元线性回归模型的矩阵表达式为____________；模型中参数OLS估计量在经典假设条件下的方差-协方差矩阵为____________。

参考答案.
$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{u}$; $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \sigma^2 \left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}$ □

5. 考虑多元线性回归模型 $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \cdots + \beta_k X_{ik} + u_i$, 在 $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0$ 的约束条件下, β_0 的最小二乘估计量为____________。

参考答案.
在 $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0$ 的约束条件下，原模型等价于 $Y_i = \beta_0 + u_i$, 因此 β_0 的最小二乘估计量为

$$\hat{\beta}_0 = \frac{1}{n}\sum Y_i = \bar{Y}.$$

□

三、简答题（共 2 题，每题 10 分）

1. 在简单一元线性回归模型中，简述最小二乘估计量（OLS）是 BLUE 的含义，并简要说明在经典假设条件下为什么 OLS 是 BLUE。

参考答案.
BLUE 即最佳线性无偏估计量，是 best linear unbiased estimators 的缩写。在经典假定条件下，最小二乘估计量具备线性、无偏性和有效性，是最佳线性无偏估计量，即BLUE，这一结论就是著名的高斯-马尔可夫定理。高斯-马尔可夫定理是建立在如下经典假设下的：1. 回归模型是正确设定的；2. 样本矩阵$\mathbf{X}'\mathbf{X}/n$ 依概率收敛于可逆常数矩阵 3. 随机干扰项具有条件零均值。 4. 随机扰动项相互独立。证明和推导参阅课件和板书笔记。 □

2. 简要说明在多元线性回归模型中是如何定义回归模型系数的估计量的有效性的，为什么最小二乘估计量（OLS）是有效（efficient）估计量？

参考答案.
考虑对回归模型的任意线性无偏估计量 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$, 计算最小二乘估计量 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 的方差：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}} \mid \boldsymbol{X}\right) &= \mathrm{E}\left[(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathrm{E}(\hat{\boldsymbol{\beta}}))(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathrm{E}(\hat{\boldsymbol{\beta}}))' \mid \boldsymbol{X}\right] \\
&= \left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1} \boldsymbol{X}'\mathrm{E}\left(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'\right)\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1} \\
&= \left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1} \boldsymbol{X}'\sigma^2\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1} \\
&= \sigma^2\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

根据课件和板书计算并说明 $\mathrm{Var}\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}} \mid \boldsymbol{X}\right) - \mathrm{Var}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}} \mid \boldsymbol{X}\right)$ 是半正定（SPD）矩阵。注意无偏性要求 $\tilde{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{AY}$，且 $\mathrm{E}\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right) = \boldsymbol{\beta}$。 □

四、计算题（共 2 题，每题 15 分）

1. 考虑已经收集的 30 家企业的生产数据，并通过计算获得如下统计量的值

$$\bar{Y}=\frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30}Y_i=25 \quad \bar{X}=\frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30}X_i=12 \quad \sum_{i=1}^{30}\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2=100 \quad \sum_{i=1}^{30}\left(X_i-\bar{X}\right)^2=60 \quad \sum_{i=1}^{30}\left(X_i-\bar{X}\right)\left(Y_i-\bar{Y}\right)=40$$

其中, Y 表示产出的对数值, X 表示劳动时间的对数值. 所有线性回归模型的经典假定均成立.

(1) 计算一元线性回归模型 $Y_i=\beta_0+\beta_1X_i+u_i, u_i\sim \mathrm{IID}\left(0,\sigma^2\right)$, 计算 OLS 估计量 $\hat{\beta}_0$ 和 $\hat{\beta}_1$.（5 分）

(2) 简述对原假设 $H_0:\beta_1=1$ 进行假设检验的基本步骤，并计算相应的检验统计量值.（5 分）

(3) 当 $X_0=12$ 时, 写出 $\mathrm{E}\left(Y\mid X_0\right)$ 的 95% 置信区间. （5 分）（当 $\alpha=0.05$ 时，$t_{\alpha/2}(30)=2.042$, $t_{\alpha/2}(29)=2.045$, $t_{\alpha/2}(28)=2.048$）

参考答案.

(1) $\hat{\beta}_0$ 和 $\hat{\beta}_1$ 分别计算如下

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^{30}\left(X_i-\bar{X}\right)\left(Y_i-\bar{Y}\right)}{\sum_{i=1}^{30}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}=\frac{40}{60}=\frac{2}{3}\\ \hat{\beta}_0 &= \bar{Y}-\hat{\beta}_1\bar{X}=25-\frac{2}{3}\times 12=17\end{aligned}$$

(2) 对 H_0 进行假设检验，首先计算 $\hat{\beta}_1$ 的方差，

$$\mathrm{Var}\left(\hat{\beta}_1\right)=\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{30}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}.$$

为了估计 $\mathrm{Var}\left(\hat{\beta}_1\right)$, 首先计算 σ^2 的估计值, $\hat{\sigma}^2$. 注意到 $\hat{Y}_i-\bar{Y}=\hat{\beta}_1\left(X_i-\bar{X}\right)$, 因此

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{30}\left(\hat{Y}_i-\bar{Y}\right)^2 &= \hat{\beta}_1^2\sum_{i=1}^{30}\left(X_i-\bar{X}\right)^2=\frac{60\times 4}{9}=\frac{80}{3}\approx 26.67,\\ \sum_{i=1}^{30}e_i^2 &= \sum_{i=1}^{30}\left(Y_i-\hat{Y}_i\right)^2=\sum_{i=1}^{30}\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2-\sum_{i=1}^{30}\left(\hat{Y}_i-\bar{Y}\right)^2=100-\frac{80}{3}=\frac{220}{3}\approx 73.33.\end{aligned}$$

所以，

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{30-2}\sum_{i=1}^{30}e_i^2=\frac{220}{3\times(30-2)}=\frac{55}{21}\approx 2.62$$

$$S_{\hat{\beta}_1}=\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^{30}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}}=\sqrt{\frac{55/21}{60}}=\sqrt{\frac{11}{21\times 12}}=\sqrt{\frac{11}{252}}$$

因此，检验统计量为

$$T_n=\frac{\hat{\beta}_1-1}{S_{\hat{\beta}_1}}=\frac{2/3-1}{\sqrt{\frac{11}{252}}}=-\sqrt{\frac{252}{11\times 9}}\approx -1.595.$$

(3) 根据对 $\hat{\beta}_0$ 和 $\hat{\beta}_1$ 的计算, 样本回归函数为

$$\hat{Y}_i=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1X_i=17+\frac{2}{3}X_i$$

则在 $X_0=12$ 时

$$\hat{Y}_0=17+\frac{2}{3}\times 12=25.$$

$$
\begin{aligned}
S_{\hat{Y}_0} &= \sqrt{\operatorname{Var}(\hat{Y}_0)} \\
&= \sqrt{\hat{\sigma}^2\left(\frac{1}{n}+\frac{(X_0-\bar{X})^2}{\sum(X_i-\bar{X})^2}\right)} \\
&= \sqrt{\frac{55}{21}\times\left[\frac{1}{30}+\frac{(12-12)^2}{60}\right]} \approx 0.295
\end{aligned}
$$

因此，$\mathrm{E}(Y \mid X_0)$ 的 95% 置信区间（confidence interval）为

$$
\left(\hat{Y}_0 - t_{\alpha/2}S_{\hat{Y}_0}, \hat{Y}_0 + t_{\alpha/2}S_{\hat{Y}_0}\right) = (25-2.048\times 0.295, 25+2.048\times 0.295) = (24.396, 25.604)
$$

□

2. 考虑多元线性回归模型 $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \cdots + \beta_k X_{ik} + u_i$, $u_i \sim \mathrm{IID}\left(0, \sigma^2\right)$，记 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 为 $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_k)'$ 不加约束条件的普通最小二乘估计量；记 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_*$ 在 $\beta_1+\beta_2=1$ 和 $\beta_{k-1}=\beta_k$ 下的最小二乘估计量。
   (1) 试通过计算说明 $\sum\left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{i1} - \hat{\beta}_2 X_{i2} - \cdots - \hat{\beta}_k X_{ik}\right)^2 \le \sum\left(Y_i - \hat{\beta}_{*1} X_{i1} - \hat{\beta}_{*2} X_{i2} - \cdots - \hat{\beta}_{*k} X_{ik}\right)^2$.（5 分）
   (2) 基于 $\sum\left(Y_i - \hat{\beta}_1 X_{i1} - \hat{\beta}_2 X_{i2} - \cdots - \hat{\beta}_k X_{ik}\right)^2$ 和 $\sum\left(Y_i - \hat{\beta}_{*1} X_{i1} - \hat{\beta}_{*2} X_{i2} - \cdots - \hat{\beta}_{*k} X_{ik}\right)^2$ 构造检验统计量检验 $H_0: \beta_1+\beta_2=1$ 和 $\beta_{k-1}=\beta_k$, 并试说明假设检验的基本步骤.（10 分）

参考答案.

(1) 因为 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{e}$ 且 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_* + \boldsymbol{e}_*$,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e} &= \sum\left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{i1} - \hat{\beta}_2 X_{i2} - \cdots - \hat{\beta}_k X_{ik}\right)^2 \\
\boldsymbol{e}_*'\boldsymbol{e}_* &= \sum\left(Y_i - \hat{\beta}_{*1} X_{i1} - \hat{\beta}_{*2} X_{i2} - \cdots - \hat{\beta}_{*k} X_{ik}\right)^2
\end{aligned}
$$

所以

$$
\boldsymbol{e}_*'\boldsymbol{e}_* = \boldsymbol{e}'\boldsymbol{e} + \left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_* - \hat{\boldsymbol{\beta}}\right)' \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_* - \hat{\boldsymbol{\beta}}\right)
$$

即 $\boldsymbol{e}_*'\boldsymbol{e}_* \ge \boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}$ 根据 $\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_* - \hat{\boldsymbol{\beta}}\right)' \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_* - \hat{\boldsymbol{\beta}}\right) \ge 0$.

(2) 令 $\sum\left(Y_i - \hat{\beta}_1 X_{i1} - \hat{\beta}_2 X_{i2} - \cdots - \hat{\beta}_k X_{ik}\right)^2 = \mathrm{RSS_U}$, $\sum\left(Y_i - \hat{\beta}_{*1} X_{i1} - \hat{\beta}_{*2} X_{i2} - \cdots - \hat{\beta}_{*k} X_{ik}\right)^2 = \mathrm{RSS_R}$, 则在 H_0 下

$$
\frac{(\mathrm{RSS_R} - \mathrm{RSS_U})/3}{\mathrm{RSS_U}/(n-k-1)} \sim F(3, n-k-1)
$$

假设检验步骤可依据教材内容展开.

□