时间序列分析（初级）：作业 1

1. 《应用时间序列分析》 P.74 习题 1、2、3、5、12.

2. 假设 $x_t = \phi_1 x_{t-1} + \varepsilon_t$ 且 $\varepsilon_t \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} (0, \sigma^2)$. $x_0 = 0$, 样本观测为 $x_1, x_2 \cdots, x_T$.
   (1) 写出 ϕ_1 的 OLS 估计量 $\hat{\phi}_1$， 并推导当 $\phi_1 = 1$ 且 $T \to \infty$ 时，$T\left(\hat{\phi}_1 - 1\right)$ 的极限分布.
   (2) 记 $\widehat{se}\left(\hat{\phi}_1\right)$ 为 $\hat{\phi}_1$ 的样本标准差，给出当 $\phi_1 = 1$ 且 $T \to \infty$ 时，$\dfrac{\hat{\phi}_1 - 1}{\widehat{se}\left(\hat{\phi}_1\right)}$ 的极限分布. （提示：记 $S_T^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\hat{\varepsilon}_t^2$， 其中 $\hat{\varepsilon}_t = x_t - \hat{\phi}_1 x_{t-1}$. 当 $T \to \infty$ 时，$S_T^2 \xrightarrow{p} \sigma^2$. 此外，$\widehat{se}\left(\hat{\phi}_1\right) = \sqrt{S_T^2 \Big/ \sum_{t=1}^{T} x_{t-1}^2}$）.

课堂上的主要推导，帮助大家熟悉：

1 阶梯函数和泛函型中心极限定理

因为定义阶梯函数如下

$$x_T(r)=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{[Tr]}\varepsilon_t=\begin{cases}0 & 0\leqslant r<1/T\\ \varepsilon_1/T & 1/T\leqslant r<2/T\\ (\varepsilon_1+\varepsilon_2)/T & 2/T\leqslant r<3/T\\ \vdots & \\ (\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_T)/T & r=1\end{cases}$$

其中，$\varepsilon_t\overset{\text{i.i.d.}}{\sim}(0,\sigma^2)$.

并且由泛函型中心极限定理可知当 $T\to\infty$ 时

$$\frac{\sqrt{T}x_T(\cdot)}{\sigma}\xrightarrow{d}W(\cdot),$$

或者记为

$$\sqrt{T}x_T(r)\xrightarrow{d}\sigma W(r).$$

2 几类 Reimann Sum

对于 AR(1) 模型，$x_t=\phi_1x_{t-1}+\varepsilon_t$，在 $H_0:\phi_1=1$ 且 $x_0=0$ 时，

$$\begin{aligned}x_t&=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_t\\ x_T&=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_T\end{aligned}$$

所以

$$x_T(r)=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{[Tr]}\varepsilon_t=\begin{cases}0 & 0\leqslant r<1/T\\ x_1/T & 1/T\leqslant r<2/T\\ x_2/T & 2/T\leqslant r<3/T\\ \vdots & \\ x_T/T & r=1\end{cases}$$

2.1 Reimann sum 1

$$\begin{aligned}&\frac{x_1}{T^2}+\frac{x_2}{T^2}+\cdots+\frac{x_{T-1}}{T^2}\\ =&\ \frac{1}{T}\left(\frac{x_1}{T}+\frac{x_2}{T}+\cdots+\frac{x_{T-1}}{T}\right)\\ \to&\ \int_0^1 x_T(r)dr\end{aligned}$$

2.2 Reimann sum 2

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{T^{3/2}}\sum_{t=1}^{T} x_{t-1} &= \frac{x_1}{T^{3/2}} + \frac{x_2}{T^{3/2}} + \cdots + \frac{x_{T-1}}{T^{3/2}} \\
&= \underbrace{\left(\frac{1}{T}\right)\left[\frac{x_1}{\sqrt{T}} + \frac{x_2}{\sqrt{T}} + \cdots + \frac{x_{T-1}}{\sqrt{T}}\right]}_{\int_0^1 \sqrt{T} x_T(r) dr} \\
&\xrightarrow{d} \sigma \int_0^1 W(r) dr
\end{aligned}
$$

考虑变换后的阶梯函数

$$
T\left[x_T(r)\right]^2 = \left[\sqrt{T} x_T(r)\right]^2 = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant r < 1/T \\ x_1^2/T & 1/T \leqslant r < 2/T \\ x_2^2/T & 2/T \leqslant r < 3/T \\ \vdots & \\ x_T^2/T & r = 1 \end{cases}
$$

2.3 Reimann sum 3

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T} x_{t-1}^2 &= \frac{x_1^2}{T^2} + \frac{x_2^2}{T^2} + \cdots + \frac{x_{T-1}^2}{T^2} \\
&= \underbrace{\left(\frac{1}{T}\right)\left[\frac{x_1^2}{T} + \frac{x_2^2}{T} + \cdots + \frac{x_{T-1}^2}{T}\right]}_{\int_0^1 \left[\sqrt{T} x_T(r)\right]^2 dr} \\
&\xrightarrow{d} \sigma^2 \int_0^1 [W(r)]^2 dr \qquad (\dagger)
\end{aligned}
$$

2.4 在 H_0 下的 Dickey-Fuller 统计量

在 H_0 下，

$$
\hat{\phi}_1 - 1 = \frac{\sum x_{t-1}\varepsilon_t}{\sum x_{t-1}^2}.
$$

因为 $2x_{t-1}\varepsilon_t = x_t^2 - x_{t-1}^2 - \varepsilon_t^2$，所以在 H_0 下

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_{t-1}\varepsilon_t &= \frac{1}{2T}\sum_{t=1}^{T}\left(x_t^2 - x_{t-1}^2 - \varepsilon_t^2\right) \\
&= \frac{1}{2T} x_T^2 - \frac{1}{2T}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t^2
\end{aligned}
$$

因为 $x_T = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_T$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2T}x_T^2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{x_T}{\sqrt{T}}\right)^2 \\ &\xrightarrow{d} \sigma^2\frac{1}{2}\left[W(1)\right]^2 \left(\text{or } \sigma^2\frac{1}{2}\chi^2_{(1)}\right)\end{aligned}$$

同时根据大数定律，

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t^2 \to \sigma^2$$

因此，

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}x_{t-1}\varepsilon_t \xrightarrow{d} \frac{\sigma^2}{2}\left\{\chi^2_{(1)} - 1\right\}. \tag{‡}$$

结合 (†) 和 (‡)，有在 H_0 下

$$\begin{aligned}T\left(\hat{\phi}_1 - 1\right) &= \frac{(1/T)\sum_{t=1}^{T}x_{t-1}\varepsilon_t}{(1/T^2)\sum_{t=1}^{T}x_{t-1}^2} \\ &\xrightarrow{d} \frac{\frac{\sigma^2}{2}\left\{[W(1)]^2 - 1\right\}}{\sigma^2\int_0^1 [W(r)]^2 dr}\end{aligned}$$

注意在 H_0 下

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}x_{t-1}\varepsilon_t = \sum_{t=1}^{T}\frac{x_{t-1}}{\sqrt{T}}\frac{\varepsilon_t}{\sqrt{T}} \xrightarrow{d} \sigma^2\int_0^1 W(r)dW(r),$$

所以，等价有

$$T\left(\hat{\phi}_1 - 1\right) \xrightarrow{d} \frac{\int_0^1 W(r)dW(r)}{\int_0^1 [W(r)]^2 dr}.$$