时间序列分析（初级）：作业 1 参考答案

2. 假设序列 $\{x_t\}$ 由 AR(1) 模型生成，$x_t = \phi x_{t-1} + \varepsilon_t$，且 $|\phi| < 1$，$\varepsilon_t \sim \left(0, \sigma_\varepsilon^2\right)$，$\{\varepsilon_t\}$ 独立同分布.

(1) 推导 $\{x_t\}$ 的自协方差函数 $\gamma_x(k)$，$k \geqslant 0$ 的表达式.

(2) 令 $z_t = x_t - x_{t-1}$，以 ϕ 和 σ_ε^2 表示 $\{z_t\}$ 的自协方差函数 $\gamma_z(k)$.

参考答案

(1) 由 $|\phi| < 1$，AR(1) 模型有传递形式

$$x_t = (1 - \phi B)^{-1} \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j},$$

由 $\{\varepsilon_t\}$ 独立同分布，对 $k \geqslant 0$ 有

$$\begin{aligned} \gamma_x(k) &= \operatorname{Cov}(x_t, x_{t-k}) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \phi^{j+k} \sigma_\varepsilon^2 \\ &= \phi^k \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{2j} \sigma_\varepsilon^2 = \phi^k \gamma_x(0), \end{aligned}$$

且

$$\gamma_x(0) = \operatorname{Var}(x_t) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi^2},$$

所以

$$\gamma_x(k) = \frac{\phi^k}{1 - \phi^2} \sigma_\varepsilon^2, \qquad k \geqslant 0.$$

(2) 由 $z_t = x_t - x_{t-1}$，

$$\begin{aligned} \gamma_z(k) &= \operatorname{Cov}(z_t, z_{t-k}) \\ &= \operatorname{Cov}(x_t - x_{t-1},\, x_{t-k} - x_{t-1-k}) \\ &= \operatorname{Cov}(x_t, x_{t-k}) + \operatorname{Cov}(x_t, -x_{t-k-1}) \\ &\quad + \operatorname{Cov}(-x_{t-1}, x_{t-k}) + \operatorname{Cov}(-x_{t-1}, -x_{t-k-1}) \\ &= \left[\phi^k - \phi^{k+1} - \phi^{k-1} + \phi^k\right] \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi^2} \\ &= \left(2\phi - \phi^2 - 1\right) \phi^{k-1} \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi^2} \\ &= -\frac{(1 - \phi)^2}{1 - \phi^2} \phi^{k-1} \sigma_\varepsilon^2 \\ &= -\frac{1 - \phi}{1 + \phi} \phi^{k-1} \sigma_\varepsilon^2, \qquad k \geqslant 1. \end{aligned}$$

当 $k = 0$ 时，$\gamma_z(0) = 2\gamma_x(0) - 2\gamma_x(1) = \dfrac{2\sigma_\varepsilon^2}{1 + \phi}$ （即方差，供批改参考）.

3. 假设 $x_t = \phi_1 x_{t-1} + \varepsilon_t$ 且 $\varepsilon_t \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \left(0, \sigma^2\right)$. $x_0 = 0$, 样本观测为 $x_1, x_2 \cdots, x_T$.

(1) 写出 ϕ_1 的 OLS 估计量 $\hat{\phi}_1$，并推导当 $\phi_1 = 1$ 且 $T \to \infty$ 时，$T\left(\hat{\phi}_1 - 1\right)$ 的极限分布.

(2) 记 $\widehat{se}\left(\hat{\phi}_1\right)$ 为 $\hat{\phi}_1$ 的样本标准差，给出当 $\phi_1 = 1$ 且 $T \to \infty$ 时，$\dfrac{\hat{\phi}_1 - 1}{\widehat{se}\left(\hat{\phi}_1\right)}$ 的极限分布. （提示：记 $S_T^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_t^2$，其中 $\hat{\varepsilon}_t = x_t - \hat{\phi}_1 x_{t-1}$. 当 $T \to \infty$ 时，$S_T^2 \xrightarrow{p} \sigma^2$. 此外，$\widehat{se}\left(\hat{\phi}_1\right) = \sqrt{S_T^2 \Big/ \sum_{t=1}^{T} x_{t-1}^2}$）.

参考答案

本题两问的完整推导即课堂关于 Dickey-Fuller 单位根检验的推导，已原文附于本作业附录（“课堂上的主要推导”）：包括附录 §1（阶梯函数和泛函型中心极限定理）、§2.3（Riemann sum 3，式 (†)）以及 §2.4（在 H_0 下的 Dickey-Fuller 统计量，式 (‡)）. 此处仅给出要点与最终结论.

(1) ϕ_1 的 OLS 估计量为

$$\hat{\phi}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{T} x_{t-1} x_t}{\sum_{t=1}^{T} x_{t-1}^2}.$$

在 $H_0 : \phi_1 = 1$ 且 $x_0 = 0$ 下，$x_t = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_t$，且

$$\hat{\phi}_1 - 1 = \frac{\sum_{t=1}^{T} x_{t-1}\varepsilon_t}{\sum_{t=1}^{T} x_{t-1}^2}.$$

于是

$$T\left(\hat{\phi}_1 - 1\right) = \frac{(1/T)\sum_{t=1}^{T} x_{t-1}\varepsilon_t}{\left(1/T^2\right)\sum_{t=1}^{T} x_{t-1}^2},$$

分子分母分别由附录式 (‡) 和式 (†) 给出，即

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_{t-1}\varepsilon_t \xrightarrow{d} \frac{\sigma^2}{2}\left\{[W(1)]^2 - 1\right\}, \qquad \frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T} x_{t-1}^2 \xrightarrow{d} \sigma^2 \int_0^1 [W(r)]^2\, dr,$$

所以

$$T\left(\hat{\phi}_1 - 1\right) \xrightarrow{d} \frac{\frac{1}{2}\left\{[W(1)]^2 - 1\right\}}{\int_0^1 [W(r)]^2\, dr} = \frac{\int_0^1 W(r)dW(r)}{\int_0^1 [W(r)]^2\, dr},$$

其中 $W(r)$ 为标准布朗运动. 该极限分布即 Dickey-Fuller 分布，是非标准的（非正态）分布，其分位数由模拟给出.

(2) 由提示，$\widehat{se}\left(\hat{\phi}_1\right) = \sqrt{S_T^2 \Big/ \sum_{t=1}^{T} x_{t-1}^2}$，且 $S_T^2 \xrightarrow{p} \sigma^2$（记 $S_T = \sqrt{S_T^2}$，则 $S_T \xrightarrow{p} \sigma$），于是

$$\begin{aligned}
\frac{\hat{\phi}_1 - 1}{\widehat{se}\left(\hat{\phi}_1\right)} &= \left(\hat{\phi}_1 - 1\right)\frac{\left(\sum_{t=1}^{T} x_{t-1}^2\right)^{1/2}}{S_T} \\
&= T\left(\hat{\phi}_1 - 1\right)\cdot\frac{1}{S_T}\left(\frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T} x_{t-1}^2\right)^{1/2},
\end{aligned}$$

由 Slutsky 定理、$S_T \xrightarrow{p} \sigma$ 以及附录中式 (†) 与 (‡) 的联合收敛，σ 被约去，

$$\frac{\hat{\phi}_1 - 1}{\widehat{se}\left(\hat{\phi}_1\right)} \xrightarrow{d} \frac{\frac{1}{2}\left\{[W(1)]^2 - 1\right\}}{\left\{\int_0^1 [W(r)]^2\, dr\right\}^{1/2}},$$

即 Dickey-Fuller t 统计量的（非标准）极限分布.