

# 时间序列分析（初级）：作业 1

1. 《应用时间序列分析》 第三章课后 习题 1、2、3、5、12.
2. 假设序列  $\{x_t\}$  由 AR(1) 模型生成,  $x_t = \phi x_{t-1} + \varepsilon_t$ , 且  $|\phi| < 1$ ,  $\varepsilon_t \sim (0, \sigma_\varepsilon^2)$ ,  $\{\varepsilon_t\}$  独立同分布.
  - (1) 推导  $\{x_t\}$  的自协方差函数  $\gamma_x(k)$ ,  $k \geq 0$  的表达式.
  - (2) 令  $z_t = x_t - x_{t-1}$ , 以  $\phi$  和  $\sigma_\varepsilon^2$  表示  $\{z_t\}$  的自协方差函数  $\gamma_z(k)$ .
3. 假设  $x_t = \phi_1 x_{t-1} + \varepsilon_t$  且  $\varepsilon_t \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} (0, \sigma^2)$ .  $x_0 = 0$ , 样本观测为  $x_1, x_2, \dots, x_T$ .
  - (1) 写出  $\phi_1$  的 OLS 估计量  $\hat{\phi}_1$ , 并推导当  $\phi_1 = 1$  且  $T \rightarrow \infty$  时,  $T(\hat{\phi}_1 - 1)$  的极限分布.
  - (2) 记  $\widehat{se}(\hat{\phi}_1)$  为  $\hat{\phi}_1$  的样本标准差, 给出当  $\phi_1 = 1$  且  $T \rightarrow \infty$  时,  $\frac{\hat{\phi}_1 - 1}{\widehat{se}(\hat{\phi}_1)}$  的极限分布. (提示: 记  $S_T^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t^2$ , 其中  $\hat{\varepsilon}_t = x_t - \hat{\phi}_1 x_{t-1}$ . 当  $T \rightarrow \infty$  时,  $S_T^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$ . 此外,  $\widehat{se}(\hat{\phi}_1) = \sqrt{S_T^2 / \sum_{t=1}^T x_{t-1}^2}$ .)

课堂上的主要推导，帮助大家熟悉：

## 1 阶梯函数和泛函型中心极限定理

因为定义阶梯函数如下

$$x_T(r) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{[Tr]} \varepsilon_t = \begin{cases} 0 & 0 \leq r < 1/T \\ \varepsilon_1/T & 1/T \leq r < 2/T \\ (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/T & 2/T \leq r < 3/T \\ \vdots & \\ (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_T)/T & r = 1 \end{cases}$$

其中， $\varepsilon_t \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} (0, \sigma^2)$ .

并且由泛函型中心极限定理可知当  $T \rightarrow \infty$  时

$$\frac{\sqrt{T}x_T(\cdot)}{\sigma} \xrightarrow{d} W(\cdot),$$

或者记为

$$\sqrt{T}x_T(r) \xrightarrow{d} \sigma W(r).$$

## 2 几类 Reimann Sum

对于 AR(1) 模型， $x_t = \phi_1 x_{t-1} + \varepsilon_t$ ，在  $H_0 : \phi_1 = 1$  且  $x_0 = 0$  时，

$$x_t = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_t$$

$$x_T = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_T$$

所以

$$x_T(r) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{[Tr]} \varepsilon_t = \begin{cases} 0 & 0 \leq r < 1/T \\ x_1/T & 1/T \leq r < 2/T \\ x_2/T & 2/T \leq r < 3/T \\ \vdots & \\ x_T/T & r = 1 \end{cases}$$

### 2.1 Reimann sum 1

$$\begin{aligned} & \frac{x_1}{T^2} + \frac{x_2}{T^2} + \cdots + \frac{x_{T-1}}{T^2} \\ &= \frac{1}{T} \left( \frac{x_1}{T} + \frac{x_2}{T} + \cdots + \frac{x_{T-1}}{T} \right) \\ &\rightarrow \int_0^1 x_T(r) dr \end{aligned}$$

## 2.2 Reimann sum 2

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{T^{3/2}} \sum_{t=1}^T x_{t-1} &= \frac{x_1}{T^{3/2}} + \frac{x_2}{T^{3/2}} + \cdots + \frac{x_{T-1}}{T^{3/2}} \\
 &= \underbrace{\left( \frac{1}{T} \right) \left[ \frac{x_1}{\sqrt{T}} + \frac{x_2}{\sqrt{T}} + \cdots + \frac{x_{T-1}}{\sqrt{T}} \right]}_{\int_0^1 \sqrt{T} x_T(r) dr} \\
 &\xrightarrow{d} \sigma \int_0^1 W(r) dr
 \end{aligned}$$

考虑变换后的阶梯函数

$$T [x_T(r)]^2 = \left[ \sqrt{T} x_T(r) \right]^2 = \begin{cases} 0 & 0 \leq r < 1/T \\ x_1^2/T & 1/T \leq r < 2/T \\ x_2^2/T & 2/T \leq r < 3/T \\ \vdots & \\ x_T^2/T & r = 1 \end{cases}$$

## 2.3 Reimann sum 3

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T x_{t-1}^2 &= \frac{x_1^2}{T^2} + \frac{x_2^2}{T^2} + \cdots + \frac{x_{T-1}^2}{T^2} \\
 &= \underbrace{\left( \frac{1}{T} \right) \left[ \frac{x_1^2}{T} + \frac{x_2^2}{T} + \cdots + \frac{x_{T-1}^2}{T} \right]}_{\int_0^1 \left[ \sqrt{T} x_T(r) \right]^2 dr} \\
 &\xrightarrow{d} \sigma^2 \int_0^1 [W(r)]^2 dr \quad (\dagger)
 \end{aligned}$$

## 2.4 在 $H_0$ 下的 Dickey-Fuller 统计量

在  $H_0$  下,

$$\hat{\phi}_1 - 1 = \frac{\sum x_{t-1} \varepsilon_t}{\sum x_{t-1}^2}.$$

因为  $2x_{t-1}\varepsilon_t = x_t^2 - x_{t-1}^2 - \varepsilon_t^2$ , 所以在  $H_0$  下

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_{t-1} \varepsilon_t &= \frac{1}{2T} \sum_{t=1}^T (x_t^2 - x_{t-1}^2 - \varepsilon_t^2) \\
 &= \frac{1}{2T} x_T^2 - \frac{1}{2T} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2
 \end{aligned}$$

因为  $x_T = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_T$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2T}x_T^2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{x_T}{\sqrt{T}}\right)^2 \\ &\xrightarrow{d} \sigma^2 \frac{1}{2} [W(1)]^2 \left( \text{or } \sigma^2 \frac{1}{2} \chi_{(1)}^2 \right)\end{aligned}$$

同时根据大数定律,

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2 \rightarrow \sigma^2$$

因此,

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_{t-1} \varepsilon_t \xrightarrow{d} \frac{\sigma^2}{2} \{ \chi_{(1)}^2 - 1 \}. \quad (\ddagger)$$

结合 (†) 和 (‡), 有在  $H_0$  下

$$\begin{aligned}T(\hat{\phi}_1 - 1) &= \frac{(1/T) \sum_{t=1}^T x_{t-1} \varepsilon_t}{(1/T^2) \sum_{t=1}^T x_{t-1}^2} \\ &\xrightarrow{d} \frac{\frac{\sigma^2}{2} \{ [W(1)]^2 - 1 \}}{\sigma^2 \int_0^1 [W(r)]^2 dr}\end{aligned}$$

注意在  $H_0$  下

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_{t-1} \varepsilon_t = \sum_{t=1}^T \frac{x_{t-1}}{\sqrt{T}} \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{T}} \xrightarrow{d} \sigma^2 \int_0^1 W(r) dW(r),$$

所以, 等价有

$$T(\hat{\phi}_1 - 1) \xrightarrow{d} \frac{\int_0^1 W(r) dW(r)}{\int_0^1 [W(r)]^2 dr}.$$

评论. 注意到在  $H_0$  下,  $x_t = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_t$ , 如果令  $t-1 = [Tr]$ , 则

$$\frac{\sqrt{T}x_T(r)}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \underbrace{\frac{\sqrt{[Tr]}}{\sqrt{T}}}_{\rightarrow \sqrt{r}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{[Tr]}} \sum_{\tau=1}^{[Tr]} \varepsilon_\tau}_{\xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2)} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, r).$$

所以  $\sqrt{T}x_T(r) = \frac{x_{t-1}}{\sqrt{T}} \xrightarrow{d} \sigma W(r)$ ,  $d\sqrt{T}x_T(r) = \frac{x_t}{\sqrt{T}} - \frac{x_{t-1}}{\sqrt{T}} = \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{T}} \xrightarrow{d} \sigma dW(r)$ . 再根据 Riemann Sum 定义积分和随机积分的定义, 有  $\sum_{t=1}^T \frac{x_{t-1}}{\sqrt{T}} \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{T}} \xrightarrow{d} \sigma^2 \int_0^1 W(r) dW(r)$ .