安徽大学 2026 年–2027 学年第一学期
《时间序列分析（初级）》期中测验（B 卷）参考答案

本卷满分 50 分。评分点按小问累计，不超过该小问分值；等价的正确方法同样给分。前问错值若在后问中被正确沿用、未引入新错误，后问仍按相应方法和运算步骤给分，同一错误不重复扣分。

一、简答题（每小题 5 分，共 10 分）

题目 1. 研究者有一条按月记录的用电量序列，希望先描述其走势，再研究相邻月份的依赖关系以及周期波动。说明时序图在第一步中的作用，并分别说明时域分析和频域分析从什么角度研究该序列。

参考答案与评分

时序图按时间顺序呈现观测值，可直观检查走势、异常值、周期性和波动幅度是否随时间变化，为后续建模提供初步判断。（1 分）

时域分析以不同时间观测值之间的相关关系及其随时间间隔变化的规律为重点，通过建立模型描述这种关系并进行预测。（2 分：指出序列值之间的相关关系 1 分，说明随时间间隔考察这种关系或据此建模预测 1 分。）自协方差、自相关函数及 AR、MA、ARMA 模型均可作为例子，不要求逐一列举名称。

频域分析从不同频率的周期波动及其强度研究序列，例如识别主要周期，并考察波动在不同频率上的分布。（2 分：指出不同频率的周期波动 1 分，说明比较其强弱或识别主要周期 1 分。）

题目 2. 对同一条原始序列进行检验：不含常数项和趋势项的 DF 检验（备择为零均值平稳）得到 $p = 0.02$；检验前 10 阶自相关系数均为零的 Ljung–Box 检验得到 $p = 0.01$。假定两项检验的适用条件均满足，在 5% 水平下分别作出判断，并说明能否直接将该序列当作白噪声而停止建模。

参考答案与评分

DF 检验的原假设是存在单位根。$0.02 < 0.05$，因此拒绝单位根原假设；在题设模型和适用条件下，检验结果支持零均值平稳的备择。（2 分，其中原假设与结论各 1 分）

Ljung–Box 检验的原假设为 $H_0 : \rho_1 = \cdots = \rho_{10} = 0$。$0.01 < 0.05$，因此拒绝该原假设，表明前 10 阶至少存在一个非零自相关的统计证据。（2 分，其中原假设与结论各 1 分）这里检验的是这些自相关系数是否全为 0，不能将零自相关直接等同于不同期独立。

两项结果并不矛盾：平稳序列可以存在自相关，不能将该序列直接视作白噪声而停止建模。（说明两项结果可同时成立，并作出不能直接停止建模的判断，给 1 分。）后续可继续识别、估计模型并检验残差，但不要求学生列出具体建模步骤。

二、计算题（每小题 10 分，共 30 分）

题目 1. 设 $\{Z_t\}$ 独立同分布且 $Z_t \sim \mathrm{N}(0,1)$，定义 $X_t = Z_t Z_{t-1}$。已知标准正态变量满足 $\mathrm{E}(Z_t^4) = 3$。本题将均值为常数、方差为有限正常数且不同期协方差为零的序列称为白噪声，不要求不同期相互独立。

（1）求均值及各整数滞后 k 的自协方差 $\gamma(k)$，判断 $\{X_t\}$ 是否为白噪声。（6 分）

（2）计算 $\mathrm{Cov}(X_t^2, X_{t-1}^2)$，据此判断相邻两项是否独立。（4 分）

解答与评分

（1）利用独立性和零均值，

$$\mathrm{E}(X_t) = \mathrm{E}(Z_t)\,\mathrm{E}(Z_{t-1}) = 0, \qquad \gamma(0) = \mathrm{E}(Z_t^2)\,\mathrm{E}(Z_{t-1}^2) = 1.$$

均值、方差各 1 分。当 $k = 1$ 时，

$$\gamma(1) = \mathrm{E}(Z_t Z_{t-1}^2 Z_{t-2}) = \mathrm{E}(Z_t)\,\mathrm{E}(Z_{t-1}^2)\,\mathrm{E}(Z_{t-2}) = 0.$$

正确展开乘积 1 分，利用独立性和零均值得到 0 为 1 分，共 2 分。对 $k = -1$，直接计算得

$$\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+1}) = \mathrm{E}(Z_{t+1} Z_t^2 Z_{t-1}) = \mathrm{E}(Z_{t+1})\,\mathrm{E}(Z_t^2)\,\mathrm{E}(Z_{t-1}) = 0.$$

当 $|k| \geq 2$ 时，两项涉及的两组 Z 变量没有重叠，且这些变量相互独立，故两项独立、协方差为零。上述结果均不依赖 t，因此

$$\boxed{\gamma(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}}$$

正确说明 $k = -1$ 及 $|k| \geq 2$ 时的协方差为 0，共 1 分；负滞后也可利用自协方差的对称性说明。均值恒为 0、方差恒为 1、不同期协方差为 0，故 $\{X_t\}$ 符合题设的白噪声定义。（1 分）

二、计算题（续）

第 1 题解答（续）

（2）先写出协方差的计算公式：

$$\mathrm{Cov}(X_t^2, X_{t-1}^2) = \mathrm{E}(X_t^2 X_{t-1}^2) - \mathrm{E}(X_t^2)\,\mathrm{E}(X_{t-1}^2).$$

因此，需要分别计算右端的三个期望。

由 $Z_s \sim \mathrm{N}(0,1)$，对任意时点 s 有

$$\mathrm{E}(Z_s^2) = \mathrm{Var}(Z_s) + [\mathrm{E}(Z_s)]^2 = 1, \qquad \mathrm{E}(Z_s^4) = 3.$$

其中第四阶矩由题目给出。先将相邻两项的平方展开：

$$X_t^2 = Z_t^2 Z_{t-1}^2, \qquad X_{t-1}^2 = Z_{t-1}^2 Z_{t-2}^2.$$

由于不同期的 Z 相互独立，其平方也相互独立，故

$$\mathrm{E}(X_t^2) = \mathrm{E}(Z_t^2 Z_{t-1}^2) = \mathrm{E}(Z_t^2)\,\mathrm{E}(Z_{t-1}^2) = 1 \times 1 = 1,$$

$$\mathrm{E}(X_{t-1}^2) = \mathrm{E}(Z_{t-1}^2 Z_{t-2}^2) = \mathrm{E}(Z_{t-1}^2)\,\mathrm{E}(Z_{t-2}^2) = 1 \times 1 = 1.$$

这也与第（1）问的均值为 0、方差为 1 相一致。

再计算乘积的期望。两项都含有 Z_{t-1}^2，相乘时应先将这一共同因子合并为 Z_{t-1}^4：

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_t^2 X_{t-1}^2) &= \mathrm{E}\left[(Z_t^2 Z_{t-1}^2)(Z_{t-1}^2 Z_{t-2}^2)\right] \\
&= \mathrm{E}(Z_t^2 Z_{t-1}^4 Z_{t-2}^2) \\
&= \mathrm{E}(Z_t^2)\,\mathrm{E}(Z_{t-1}^4)\,\mathrm{E}(Z_{t-2}^2) \\
&= 1 \times 3 \times 1 = 3.
\end{aligned}$$

这里的期望分解依据是 Z_t, Z_{t-1}, Z_{t-2} 三个不同期变量相互独立，不能直接把 $\mathrm{E}(X_t^2 X_{t-1}^2)$ 写成 $\mathrm{E}(X_t^2)\,\mathrm{E}(X_{t-1}^2)$。正确展开乘积并合并共同因子 1 分，利用独立性分解期望、代入各阶矩并得到 3 为 1 分，共 2 分。

最后代回协方差公式：

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X_t^2, X_{t-1}^2) = 3 - 1 \times 1 = 2.}$$

正确代入协方差公式并算得 2 为 1 分。

若 X_t 与 X_{t-1} 独立，则它们的平方也独立，从而必有 $\mathrm{E}(X_t^2 X_{t-1}^2) = \mathrm{E}(X_t^2)\,\mathrm{E}(X_{t-1}^2)$，即平方的协方差为 0。这与算得的协方差 $2 \neq 0$ 矛盾，因此 X_t 与 X_{t-1} 不独立。正确说明这一判断依据并作出结论 1 分，本小问共 4 分。这说明不同期不相关并不意味着相互独立。

二、计算题（续）

题目　2. 已知零均值平稳序列 $\{X_t\}$ 满足 AR(2) 模型 $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$；$\{\varepsilon_t\}$ 为均值 0、方差 $\sigma_\varepsilon^2 > 0$ 的白噪声。本题涉及的 AR 模型均假定当期噪声与过去的序列值不相关。已知该序列的方差和自相关系数为 $\gamma(0) = 10$、$\rho_1 = 1/2$、$\rho_2 = 1/10$。

（1）用 Yule–Walker 方程反推出 ϕ_1, ϕ_2。（5 分）

（2）求白噪声方差 σ_ε^2。（2 分）

（3）计算 ρ_3，并说明该序列的 ρ_1, ρ_2 能否同时由平稳 AR(1) 模型产生。（3 分）

解答与评分

（1）由题设，当期噪声与过去的序列值不相关，即 $\mathrm{Cov}(\varepsilon_t, X_{t-k}) = 0$（$k \geq 1$）。对模型两边分别与 X_{t-1}、X_{t-2} 取协方差，利用平稳性及自协方差的对称性，再除以 $\gamma(0)$，得到 Yule–Walker 方程：

$$\gamma(1) = \phi_1\gamma(0) + \phi_2\gamma(1) \quad\Longrightarrow\quad \rho_1 = \phi_1 + \phi_2\rho_1,$$
$$\gamma(2) = \phi_1\gamma(1) + \phi_2\gamma(0) \quad\Longrightarrow\quad \rho_2 = \phi_1\rho_1 + \phi_2.$$

两条方程各 1 分，共 2 分；直接正确写出自相关系数形式的方程同样给分。代入已知数值得

$$\frac{1}{2} = \phi_1 + \frac{1}{2}\phi_2, \qquad \frac{1}{10} = \frac{1}{2}\phi_1 + \phi_2.$$

由第一式得 $\phi_1 = \rho_1(1 - \phi_2)$，代入第二式，得 $\rho_2 = \rho_1^2 + \phi_2(1 - \rho_1^2)$。所以

$$\phi_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = -\frac{1}{5}, \qquad \phi_1 = \rho_1(1 - \phi_2) = \frac{3}{5}.$$

正确消元 1 分，两个参数各 1 分。

（2）由 $\gamma(k) = \rho_k\gamma(0)$，有 $\gamma(1) = 5$、$\gamma(2) = 1$。噪声 ε_t 与当期 X_t 的协方差需单独计算。由模型及题设的不相关条件，

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\varepsilon_t, X_t) &= \phi_1\,\mathrm{Cov}(\varepsilon_t, X_{t-1}) + \phi_2\,\mathrm{Cov}(\varepsilon_t, X_{t-2}) + \mathrm{Var}(\varepsilon_t)\\ &= 0 + 0 + \sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\varepsilon^2.\end{aligned}$$

对模型两边与 X_t 取协方差，得到方差关系式 $\gamma(0) = \phi_1\gamma(1) + \phi_2\gamma(2) + \sigma_\varepsilon^2$。所以

$$\sigma_\varepsilon^2 = \gamma(0) - \phi_1\gamma(1) - \phi_2\gamma(2) = 10 - \frac{3}{5}\times 5 + \frac{1}{5}\times 1 = \frac{36}{5} = 7.2.$$

公式、结果各 1 分。

（3）同样，对模型两边与 X_{t-k} 取协方差并除以 $\gamma(0)$，可得 $\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2}$（$k \geq 2$）。取 $k = 3$，得

$$\rho_3 = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{10} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{25} = -0.04.$$

正确递推式 1 分，结果 1 分。对同样满足题设不相关条件的平稳 AR(1) 模型，若自回归系数为 ϕ，按相同的协方差运算可得 $\rho_k = \phi\rho_{k-1}$（$k \geq 1$）。由 $\rho_0 = 1$，得到 $\rho_1 = \phi$、$\rho_2 = \phi^2$。因此 $\rho_1 = 1/2$ 必须对应 $\rho_2 = 1/4$，与本题给定的自相关系数 $\rho_2 = 1/10$ 矛盾，故不能由平稳 AR(1) 同时产生这两个自相关系数。（说明 $\rho_2 = \rho_1^2$ 与已知数值矛盾并作出判断，给 1 分。）

二、计算题（续）

题目　3. 考虑平稳模型 $X_t = \frac{1}{2}X_{t-1} + \varepsilon_t - \frac{1}{4}\varepsilon_{t-1} + \frac{1}{8}\varepsilon_{t-2}$，其中 $\{\varepsilon_t\}$ 为均值 0、方差 48 的白噪声。记其传递形式为 $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} G_j \varepsilon_{t-j}$。

（1）求 Green 函数 G_0, G_1 及 $j \geq 2$ 时 G_j 的一般式，写出计算过程。（5 分）

（2）计算 $\mathrm{Var}(X_t)$。（3 分）

（3）计算 $\mathrm{Cov}(X_t, \varepsilon_{t-2})$。（2 分）

解答与评分

（1）**按课件公式逐步推导**。对不含常数项的 ARMA 模型，课件采用 $X_t = \sum_{k=1}^{p} \phi_k X_{t-k} + \varepsilon_t - \sum_{k=1}^{q} \theta_k \varepsilon_{t-k}$ 的减号约定。本题 $p = 1, q = 2$，对应参数为

$$\phi_1 = \frac{1}{2}, \qquad \theta_1 = \frac{1}{4}, \qquad \boxed{\theta_2 = -\frac{1}{8}}.$$

这里 $-\theta_2 \varepsilon_{t-2} = +\frac{1}{8}\varepsilon_{t-2}$，故 θ_2 必须取 $-\frac{1}{8}$，不能将题干中这一项的正系数直接当作 θ_2。

课件《Lecture-3-Stationary-TS-1》第 49/95 页给出

$$G_0 = 1, \qquad G_j = \sum_{k=1}^{j} G_{j-k}\phi'_k - \theta'_j \quad (j \geq 1),$$

其中 $\phi'_k = \phi_k$（$1 \leq k \leq p$），$k > p$ 时为 0；$\theta'_j = \theta_j$（$1 \leq j \leq q$），$j > q$ 时为 0。本题的自回归系数中仅 $\phi'_1 = \frac{1}{2}$ 非零，故公式化为 $G_j = \frac{1}{2}G_{j-1} - \theta'_j$。逐项代入得

$$\begin{aligned} G_0 &= 1, \\ G_1 &= \tfrac{1}{2}G_0 - \theta_1 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}, \\ G_2 &= \tfrac{1}{2}G_1 - \theta_2 = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4} - \left(-\tfrac{1}{8}\right) = \tfrac{1}{4}. \end{aligned}$$

本题 $\theta'_1 = \frac{1}{4}$、$\theta'_2 = -\frac{1}{8}$；由于 MA 部分的阶数为 $q = 2$，$j \geq 3$ 时 $\theta'_j = 0$，从而

$$G_j = \frac{1}{2}G_{j-1} \qquad (j \geq 3).$$

这就是该齐次递推关系从 $j = 3$ 开始的原因；在 $j = 2$ 时仍须保留 $-\theta_2 = \frac{1}{8}$。以 $G_2 = \frac{1}{4}$ 为起点，每递推一次乘以 $\frac{1}{2}$；由 G_2 到 G_j 共递推 $j - 2$ 次，因此 $G_j = (\frac{1}{2})^{j-2}G_2$（$j \geq 2$），得到

$$\boxed{G_0 = 1, \quad G_1 = \frac{1}{4}, \quad G_j = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-2} = 2^{-j} \quad (j \geq 2).}$$

一般式包含 $j = 2$ 这一初始值，而齐次递推从 $j = 3$ 开始，两者的适用范围并不矛盾。

二、计算题（续）

第 3 题解答（续）

等价的延迟算子法。令 $BX_t = X_{t-1}$，则

$$(1 - \tfrac{1}{2}B)X_t = (1 - \tfrac{1}{4}B + \tfrac{1}{8}B^2)\varepsilon_t.$$

其中 B^2 项的系数为 $-\theta_2 = \frac{1}{8}$，与前述参数约定一致。令 $G(B) = \sum_{j=0}^{\infty} G_j B^j$，则题给传递形式为 $X_t = G(B)\varepsilon_t$。代入模型并比较各滞后白噪声项的系数，得到

$$(1 - \tfrac{1}{2}B)G(B) = 1 - \tfrac{1}{4}B + \tfrac{1}{8}B^2, \qquad G(B) = \frac{1 - \frac{1}{4}B + \frac{1}{8}B^2}{1 - \frac{1}{2}B}.$$

展开左端为 $G_0 + \sum_{j=1}^{\infty}(G_j - \frac{1}{2}G_{j-1})B^j$，比较 B^0, B^1, B^2 的系数，逐项求得

$$G_0 = 1,$$

$$G_1 - \tfrac{1}{2}G_0 = -\tfrac{1}{4} \implies G_1 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4},$$

$$G_2 - \tfrac{1}{2}G_1 = \tfrac{1}{8} \implies G_2 = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{4}.$$

右端从 B^3 起各项系数均为 0，所以 $G_j - \frac{1}{2}G_{j-1} = 0$，即 $G_j = \frac{1}{2}G_{j-1}$（$j \geq 3$）。以 $G_2 = \frac{1}{4}$ 为起点递推，得到

$$G_0 = 1, \qquad G_1 = \frac{1}{4}, \qquad G_j = \left(\frac{1}{2}\right)^{j-2} G_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-2} = 2^{-j} \quad (j \geq 2).$$

两种方法的初始值、递推关系及一般式完全一致；2^{-j} 这一表达式不适用于 $j = 1$。

统一评分（共 5 分）：建立正确的系数关系或几何级数展开式 1 分；G_0, G_1 各 0.5 分，G_2 为 1 分；推导 $j \geq 3$ 时的递推关系，或通过展开正确提取一般项系数，给 1 分；写出 $j \geq 2$ 时的正确一般式 1 分。各步骤按上述分值累计，不因采用不同方法重复给分。采用课件公式时，参数代入应体现 $\theta_2 = -\frac{1}{8}$；采用延迟算子或展开法时，正确处理分子中的 $+\frac{1}{8}B^2$ 即可，不另要求写出 θ_2。任选一种方法完整作答即可得 5 分，不要求同时给出两种推导。G_2 可单独写出，也可由适用于 $j \geq 2$ 的正确一般式在 $j = 2$ 时体现，其对应的 1 分不要求重复书写。

（2）白噪声各期不相关，因此

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X_t) &= 48\sum_{j=0}^{\infty} G_j^2 \\ &= 48\left[1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^r\right] \\ &= 48\left(1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{12}\right) = \boxed{55}.\end{aligned}$$

方差求和公式、几何级数、最终结果各 1 分。

（3）将传递形式代入协方差。由于白噪声不同期不相关，只有 $j = 2$ 的一项保留下来：

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X_t, \varepsilon_{t-2}) &= \sum_{j=0}^{\infty} G_j \,\mathrm{Cov}(\varepsilon_{t-j}, \varepsilon_{t-2}) \\ &= G_2 \,\mathrm{Var}(\varepsilon_{t-2}) = \frac{1}{4} \times 48 = \boxed{12}.\end{aligned}$$

识别对应系数 1 分，数值 1 分。

三、证明题（共 10 分）

设实值序列 $\{X_t\}$ 宽平稳，均值为 μ，方差 $\gamma(0) > 0$，自相关函数为 ρ_l。给定整数 $l \geq 1$，仅利用 X_t 构造对 X_{t+l} 的线性预测 $aX_t + b$，其中 a, b 为实常数。本题以预测误差平方的期望最小作为选择系数的标准。请利用均值、方差与协方差的性质推导，写出展开、配方和协方差计算过程，不直接套用预测公式。

（1）令 $R(a,b) = \mathrm{E}[(X_{t+l} - aX_t - b)^2]$，将其展开并配方为关于 a, b 的平方项与不依赖 a, b 的余项之和。（5 分）

（2）由（1）的配方结果，说明最小值达到的条件，求出最优的 a, b 及最小均方预测误差；再计算最优预测误差与 X_t 的协方差，并据此判断二者是否相关。（5 分）

证明与评分

（1）宽平稳性给出 $\mathrm{Var}(X_{t+l}) = \mathrm{Var}(X_t) = \gamma(0)$，$\mathrm{Cov}(X_{t+l}, X_t) = \gamma(l) = \gamma(0)\rho_l$。利用恒等式 $\mathrm{E}(Y^2) = \mathrm{Var}(Y) + (\mathrm{E}\,Y)^2$，将均方误差分为误差方差与误差均值的平方：

$$\begin{aligned} R(a,b) &= \mathrm{Var}(X_{t+l} - aX_t) + [\mathrm{E}(X_{t+l} - aX_t - b)]^2 \\ &= \mathrm{Var}(X_{t+l}) + a^2\,\mathrm{Var}(X_t) - 2a\,\mathrm{Cov}(X_{t+l}, X_t) + [(1-a)\mu - b]^2 \\ &= \gamma(0)(1 + a^2 - 2a\rho_l) + [(1-a)\mu - b]^2 \\ &= \boxed{\gamma(0)(a-\rho_l)^2 + [b - (1-a)\mu]^2 + \gamma(0)(1-\rho_l^2)}. \end{aligned}$$

最后一步使用配方恒等式 $1+a^2-2a\rho_l = (a-\rho_l)^2+1-\rho_l^2$，并将 $[(1-a)\mu-b]^2$ 改写为 $[b-(1-a)\mu]^2$。均方误差分解 1 分，方差与协方差展开 2 分，利用上述恒等式配方并得到最终表达式 2 分。

（2）配方后的两个平方项均非负，且 $\gamma(0) > 0$。要使两项同时为零，必须且只需 $a - \rho_l = 0$、$b - (1-a)\mu = 0$，即

$$\boxed{a^* = \rho_l, \qquad b^* = [1 - \rho_l]\mu}$$

这是唯一的最小化系数组合。（最小值达到的条件 1 分，两个系数各 0.5 分，共 2 分）代入配方结果，得

$$\widehat{X}_t(l) = \mu + \rho_l(X_t - \mu), \qquad \boxed{R_{\min} = \gamma(0)[1 - \rho_l^2]}.$$

最小均方预测误差 1 分。预测误差为 $e_t(l) = X_{t+l} - \widehat{X}_t(l) = (X_{t+l} - \mu) - \rho_l(X_t - \mu)$，其均值为 0。计算协方差得

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(e_t(l), X_t) &= \mathrm{Cov}(X_{t+l}, X_t) - \rho_l\,\mathrm{Var}(X_t) \\ &= \gamma(l) - \rho_l\gamma(0) = 0. \end{aligned}$$

因此，最优预测误差 $e_t(l)$ 与 X_t 不相关。（协方差展开 1 分，算出协方差为 0 并作出不相关的判断 1 分。）这里仅在形如 $aX_t + b$ 的预测式之间比较均方预测误差，结论不需要额外的分布假设。

评分注意：均方预测误差的展开、配方和协方差的计算均须写出过程。仅列出预测公式或直接断言预测误差与 X_t 不相关，不能获得相应的推导分；正确结果仍按上述结果分给分。从均方预测误差定义出发的等价推导，按相应步骤给分。