安徽大学 2026 年–2027 学年第一学期
《时间序列分析（初级）》期中测验（A 卷）参考答案

本卷满分 50 分。评分点按小问累计，不超过该小问分值；等价的正确方法同样给分。前问错值若在后问中被正确沿用、未引入新错误，后问仍按相应方法和运算步骤给分，同一错误不重复扣分。

一、简答题（每小题 5 分，共 10 分）

题目 1. 某市连续 120 个月的用电量记录为 $x_1, \ldots, x_{120}$。说明这些观测值与随机序列 X_t 的关系；若删除日期标签，仅保留按数值大小排序后的记录，能否保证保留原序列的自相关关系？说明理由。

参考答案与评分

观测值序列 $x_1, \ldots, x_{120}$ 是随机序列 $X_1, \ldots, X_{120}$ 的一次实现；前者是实际记录，后者是按时间顺序排列的一组随机变量。（2 分，关系与解释各 1 分）

不能保证保留原序列的自相关关系。（1 分）删除日期并按大小排序会丢失时间顺序，无法一般地恢复原来相邻或相隔指定期数的观测配对。（1 分）排序虽然保留样本均值、方差等不依赖排列的统计量，却可能改变样本自相关，因此不能据此可靠推断原序列的动态关系。（1 分；也可用其他正确解释或反例说明。）

题目 2. 两个已确认平稳的序列具有如下样本相关特征（ACF 为自相关函数，PACF 为偏自相关函数）：甲序列的 ACF 在 2 阶后近似截尾、PACF 拖尾；乙序列的 ACF 拖尾、PACF 在 1 阶后近似截尾。分别提出一个优先尝试的模型及依据，并说明为何不能仅凭这些样本图形确定最终模型。

参考答案与评分

甲序列优先尝试 MA(2)：总体 MA(2) 的 ACF 在 2 阶截尾，而 PACF 一般拖尾。（2 分，模型与依据各 1 分）乙序列优先尝试 AR(1)：总体 AR(1) 的 ACF 拖尾，PACF 在 1 阶截尾。（2 分，模型与依据各 1 分）

样本 ACF、PACF 存在抽样波动，这些形态仅提供候选模型。还需估计参数，并检验残差是否仍有自相关以及模型参数是否显著，据此判断模型是否合适、是否可以简化。（1 分）

二、计算题（每小题 10 分，共 30 分）

题目 1. 设随机变量 U 的均值为 0、方差为 4；$\{\varepsilon_t\}$ 为均值 0、方差 9 的白噪声序列，且 $\mathrm{Cov}(U,\varepsilon_t)=0$ 对所有整数 t 成立。定义 $X_t = 5 + U + \varepsilon_t$，其中各期使用同一个随机变量 U。

（1）求 $\mathrm{E}(X_t)$ 与 $\mathrm{Var}(X_t)$。（2 分）

（2）求 $\gamma(t,t-k)=\mathrm{Cov}(X_t,X_{t-k})$，并判断 $\{X_t\}$ 是否宽平稳。（4 分）

（3）记前 n 期的样本均值为 $\bar{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}X_t$。求 $\mathrm{Var}(\bar{X}_n)$，并判断该方差是否随 $n\to\infty$ 趋于 0。（4 分）

解答与评分

（1）由题设 $\mathrm{E}\,U=\mathrm{E}\,\varepsilon_t=0$、$\mathrm{Cov}(U,\varepsilon_t)=0$，

$$\mathrm{E}(X_t)=5,\qquad \mathrm{Var}(X_t)=\mathrm{Var}(U)+\mathrm{Var}(\varepsilon_t)=4+9=13.$$

均值、方差各 1 分。

（2）各期的共同随机变量 U 会产生跨期协方差。由协方差的运算性质及题设中的不相关性，

$$\begin{aligned}\gamma(t,t-k)&=\mathrm{Cov}(U+\varepsilon_t,U+\varepsilon_{t-k})\\&=\mathrm{Var}(U)+\mathrm{Cov}(U,\varepsilon_{t-k})+\mathrm{Cov}(\varepsilon_t,U)+\mathrm{Cov}(\varepsilon_t,\varepsilon_{t-k})\\&=\begin{cases}13, & k=0,\\ 4, & k\neq 0.\end{cases}\end{aligned}$$

展开协方差并正确消去交叉项 1 分；$k=0$ 与 $k\neq 0$ 的结果各 1 分。均值恒为 5，二阶矩有限，且协方差只依赖滞后 k，故 $\{X_t\}$ 宽平稳。（1 分）

（3）由各期共有同一个 U，

$$\bar{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(5+U+\varepsilon_t)=5+U+\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t.$$

正确写出样本均值的分解 1 分。白噪声不同期不相关，因此

$$\mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{t=1}^{n}\mathrm{Var}(\varepsilon_t)=\frac{9}{n}.$$

正确利用不相关性求得 $9/n$ 1 分。又因 U 与各期白噪声不相关，

$$\boxed{\mathrm{Var}(\bar{X}_n)=4+\frac{9}{n}.}$$

样本均值的方差 1 分。当 $n\to\infty$ 时，该方差趋于 4 而非 0：取平均会减弱白噪声部分，但不能消除各期共有的随机项 U。（1 分）

另法：双重求和含 n 个值为 13 的对角项及 $n(n-1)$ 个值为 4 的非对角项：

$$\mathrm{Var}(\bar{X}_n)=\frac{1}{n^2}\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\mathrm{Cov}(X_t,X_s)=\frac{13n+4n(n-1)}{n^2}=4+\frac{9}{n}.$$

此法评分：双重求和 1 分，区分两类项 1 分，化简结果及极限解释各 1 分。

二、计算题（续）

题目　2. 已知 $\{X_t\}$ 服从 $X_t = 2 + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$，其中 $\{\varepsilon_t\}$ 为均值 0、方差 $\sigma_\varepsilon^2 > 0$ 的白噪声序列。总体自协方差满足 $\gamma(0) = 10$、$\gamma(1) = 4$。

（1）求所有可能的参数组合 $(\theta, \sigma_\varepsilon^2)$。（5 分）

（2）若要求模型可逆，选出唯一的参数组合并说明理由。（3 分）

（3）对可逆表示，将 ε_t 写成当前与过去的 $X_t - 2$ 的无限线性组合。（2 分）

解答与评分

（1）常数项 2 不影响协方差。由白噪声不同期不相关，

$$\gamma(0) = \mathrm{Var}(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}) = (1 + \theta^2)\sigma_\varepsilon^2 = 10,$$

$$\gamma(1) = \mathrm{Cov}(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1} - \theta\varepsilon_{t-2}) = -\theta\sigma_\varepsilon^2 = 4.$$

第二式中只有两项共有的 ε_{t-1} 产生非零协方差。写出这两条方程共 2 分。由第二式知 $\theta < 0$，消去 σ_ε^2 得

$$\frac{-\theta}{1 + \theta^2} = \frac{2}{5} \quad \Longrightarrow \quad 2\theta^2 + 5\theta + 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \theta = -\frac{1}{2} \text{ 或 } -2.$$

求出两个根 2 分。分别代入 $\sigma_\varepsilon^2 = -4/\theta$，得到所有可能的参数组合

$$\boxed{(\theta, \sigma_\varepsilon^2) = (-1/2, 8) \quad \text{或} \quad (-2, 2).}$$

两组白噪声方差各 0.5 分，共 1 分。

（2）按课件的减号约定，MA 多项式为 $\Theta(z) = 1 - \theta z$，其根为 $z = 1/\theta$。（1 分）可逆性要求根在单位圆外，即 $|\theta| < 1$。（1 分）所以唯一可逆组合为 $(\theta, \sigma_\varepsilon^2) = (-1/2, 8)$。（1 分）

（3）令 $Y_t = X_t - 2$。对可逆组合 $\theta = -1/2$，由 $\varepsilon_t = Y_t + \theta\varepsilon_{t-1} = Y_t - \frac{1}{2}\varepsilon_{t-1}$ 反复代入，得

$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{m} (-\tfrac{1}{2})^j Y_{t-j} + (-\tfrac{1}{2})^{m+1}\varepsilon_{t-m-1}.$$

余项均值为 0，其方差为 $8(1/4)^{m+1}$，随 $m \to \infty$ 趋于 0；也就是说，

$$\mathrm{E}\left[\left(\varepsilon_t - \sum_{j=0}^{m} (-\tfrac{1}{2})^j Y_{t-j}\right)^2\right] = 8(1/4)^{m+1} \longrightarrow 0.$$

因此得到下面的无限展开。令 $BX_t = X_{t-1}$，按课件的延迟算子记法，

$$\varepsilon_t = (1 + \tfrac{1}{2}B)^{-1}(X_t - 2) = \sum_{j=0}^{\infty} (-\tfrac{1}{2})^j (X_{t-j} - 2).$$

正确使用延迟算子或写出逐次代入关系 1 分，得到含正确交替符号的无限展开 1 分。

二、计算题（续）

题目 3. 设 $\{X_t\}$ 是平稳 AR(2) 序列，满足 $X_t = 1 + \frac{1}{2}X_{t-1} + \frac{1}{4}X_{t-2} + \varepsilon_t$；$\{\varepsilon_t\}$ 独立同分布，均值 0、方差为正且有限。已观测到 $X_t = 6$、$X_{t-1} = 2$。记 $\widehat{X}_t(l)$ 为基于截至 t 期全部观测信息的 l 步条件均值预测。

（1）求序列的均值 μ。（2 分）

（2）计算 $\widehat{X}_t(1)$ 与 $\widehat{X}_t(2)$。（4 分）

（3）新观测 $X_{t+1} = 5$ 到来后，计算对 X_{t+2} 的更新预测 $\widehat{X}_{t+1}(1)$，并将预测修正量表示为本次一步预测误差的倍数。（4 分）

解答与评分

（1）对模型取期望：$\mu = 1 + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{4}\mu$，从而

$$\boxed{\mu = 4.}$$

均值方程、结果各 1 分。

（2）按课件的条件均值预测方法，将已知的观测值直接代入，将尚未观测的序列值用其预测值代替。该平稳 AR(2) 模型可表示为均值加上当前及过去扰动的线性组合；由于扰动独立同分布且均值为 0，未来扰动满足

$$\mathrm{E}(\varepsilon_{t+l} \mid X_t, X_{t-1}, \ldots) = 0, \qquad l \geq 1.$$

因此，一步预测直接代入 X_t 和 X_{t-1}；两步预测用一步预测值替代尚未观测的 X_{t+1}：

$$\begin{aligned}
\widehat{X}_t(1) &= \mathrm{E}(X_{t+1} \mid X_t, X_{t-1}, \ldots) = 1 + \tfrac{1}{2}X_t + \tfrac{1}{4}X_{t-1} = 1 + \tfrac{1}{2} \times 6 + \tfrac{1}{4} \times 2 = 4.5, \\
\widehat{X}_t(2) &= \mathrm{E}(X_{t+2} \mid X_t, X_{t-1}, \ldots) = 1 + \tfrac{1}{2}\widehat{X}_t(1) + \tfrac{1}{4}X_t \\
&= 1 + \tfrac{1}{2} \times 4.5 + \tfrac{1}{4} \times 6 = 4.75.
\end{aligned}$$

每个预测值的递推式与数值各 1 分，共 4 分。无须额外假定扰动为正态分布。

（3）用新观测替换原来对 X_{t+1} 的预测，得到

$$\widehat{X}_{t+1}(1) = 1 + \tfrac{1}{2} \times 5 + \tfrac{1}{4} \times 6 = 5.$$

更新公式与数值各 1 分。本次一步预测误差为 $e_t(1) = X_{t+1} - \widehat{X}_t(1) = 5 - 4.5 = 0.5$。（1 分）故

$$\begin{aligned}
\widehat{X}_{t+1}(1) - \widehat{X}_t(2) &= \left[1 + \tfrac{1}{2}X_{t+1} + \tfrac{1}{4}X_t\right] - \left[1 + \tfrac{1}{2}\widehat{X}_t(1) + \tfrac{1}{4}X_t\right] \\
&= \tfrac{1}{2}\left[X_{t+1} - \widehat{X}_t(1)\right] = \tfrac{1}{2}e_t(1) = 0.25.
\end{aligned}$$

写出修正量与误差的倍数关系 1 分。

三、证明题（共 10 分）

设 $\{\varepsilon_t\}$ 为均值 0、方差 $\sigma_\varepsilon^2 > 0$ 的白噪声，$\phi \in \{-1, 1\}$。考虑对所有整数 t 成立的方程 $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$。不预设噪声与序列过去值不相关。请按以下步骤，从方差与自协方差的性质出发，证明该方程不存在有限方差的宽平稳解；不直接引用 AR 模型的平稳性判据。

（1）对任意正整数 n，将 $X_t - \phi^n X_{t-n}$ 写成白噪声的线性组合，并求其方差。（5 分）

（2）若该方程存在有限方差的宽平稳解，记其自协方差为 $\gamma(k)$。构造不等式，求（1）中方差的一个与 n 无关的上界，并结合（1）的结果完成证明。（5 分）

证明与评分

（1）先将 $X_{t-1} = \phi X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}$ 代入，得 $X_t = \phi^2 X_{t-2} + \phi\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$。继续逐期代入，对任意 $n \geq 1$ 有

$$X_t = \phi^n X_{t-n} + \sum_{j=0}^{n-1} \phi^j \varepsilon_{t-j}, \qquad X_t - \phi^n X_{t-n} = \sum_{j=0}^{n-1} \phi^j \varepsilon_{t-j}.$$

正确迭代 3 分。由于白噪声不同期不相关，且 $\phi^2 = 1$，

$$\operatorname{Var}(X_t - \phi^n X_{t-n}) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{n-1} \phi^{2j} = n\sigma_\varepsilon^2.$$

利用不相关性 1 分，得到 $n\sigma_\varepsilon^2$ 1 分。

（2）假设存在宽平稳解，其方差为 $\gamma(0) < \infty$。由方差非负性，

$$\operatorname{Var}(X_t + X_{t-n}) = 2\gamma(0) + 2\gamma(n) \geq 0,$$
$$\operatorname{Var}(X_t - X_{t-n}) = 2\gamma(0) - 2\gamma(n) \geq 0.$$

所以 $-\gamma(0) \leq \gamma(n) \leq \gamma(0)$，即 $|\gamma(n)| \leq \gamma(0)$。（1 分）

另一种解法：柯西–施瓦茨（Cauchy–Schwarz）不等式。令 $\mu = \mathrm{E}(X_t)$，对中心化变量 $X_t - \mu$ 与 $X_{t-n} - \mu$ 应用该不等式，得

$$|\gamma(n)| = \left|\mathrm{E}[(X_t - \mu)(X_{t-n} - \mu)]\right| \leq \sqrt{\mathrm{E}[(X_t - \mu)^2]\,\mathrm{E}[(X_{t-n} - \mu)^2]} = \gamma(0).$$

两种方法对 $\gamma(0) = 0$ 也成立；任选一种正确推导得上述 1 分，不重复计分。

以下步骤两种方法共用。由 $|\phi^n| = 1$，有 $-\phi^n\gamma(n) \leq |\gamma(n)|$，因此

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(X_t - \phi^n X_{t-n}) &= \operatorname{Var}(X_t) + \phi^{2n}\operatorname{Var}(X_{t-n}) - 2\phi^n \operatorname{Cov}(X_t, X_{t-n}) \\ &= 2\gamma(0) - 2\phi^n\gamma(n) \\ &\leq 2\gamma(0) + 2|\gamma(n)| \leq 4\gamma(0).\end{aligned}$$

方差展开 1 分，上界 1 分。结合（1）得到 $n\sigma_\varepsilon^2 \leq 4\gamma(0)$ 对所有 n 成立，但左边在 $n \to \infty$ 时趋于无穷，右边为有限常数，矛盾。（2 分）

因此 $\phi = 1$ 与 $\phi = -1$ 时均不存在有限方差的宽平稳解。

评分注意：白噪声只保证不同期的 ε_t 不相关；题干未假定 ε_t 与 X_{t-1} 不相关，故不能直接写出 $\operatorname{Var}(X_t) = \operatorname{Var}(X_{t-1}) + \sigma_\varepsilon^2$。直接引用 AR 平稳性判据不计作证明步骤；其他正确推导按对应步骤给分。

命题含义（不另计分）：本题多项式 $\Phi(z) = 1 - \phi z$ 的根为 $z = 1/\phi = \pm 1$，位于单位圆上。上述方差推导说明了本题单位根情形下不存在有限方差的宽平稳解。