时间序列分析（初级）：期中考试试卷（开卷）（参考答案）

2024-25 第一学期

任课教师: 陈垚翰

安徽大学 大数据与统计学院

考试时间：2024年10月28日-2024年11月4日

- 试卷总共有 6 道大题；
- 2、3、4、5、6 大题含有多个小题；
- 完成所有问题并详细展示必要的推导和演算过程；
- 可以参阅课本、讲义和相关资料，但是必须独立完成试题；
- 打印试卷，并用 A4 作业纸作答，将试卷与作业纸装订提交；
- 试卷总分为 100 分；
- 在 2024 年 11 月 4 日（周一）课前交卷；
- Good Luck!

1. 设 $\{x_t\}$ 和 $\{y_t\}$ 是相互独立的平稳序列，并且有相同的均值和自协方差函数．定义序列如下

$$z_t = \begin{cases} x_t, t = 2n+1 \\ y_t, t = 2n \end{cases}$$

其中 n 为非负整数，讨论并说明 $\{z_t\}$ 是否是宽平稳序列.

参考答案

设 $\mathbb{E}(x_t) = \mathbb{E}(y_t) = \mu$，则 $\mathbb{E}(z_t^2) < 2\mathbb{E}(x_t^2) + 2\mathbb{E}(y_t^2) < \infty$，且 $\mathbb{E}(z_t) = \mu$. 不失一般性，假设 $\mu = 0$.

- 当 $t = 2m+1$，$s = 2n+1$ 时，$\mathrm{Cov}(z_t, z_s) = \mathrm{Cov}(x_t, x_s) = \gamma_{2m-2n}$.
- 当 $t = 2m$，$s = 2n$ 时，$\mathrm{Cov}(z_t, z_s) = \mathrm{Cov}(y_t, y_s) = \gamma_{2m-2n}$.
- 其他情况，$\mathrm{Cov}(z_t, z_s) = 0$.

综上所述，

$$\mathrm{Cov}(z_t, z_s) = \begin{cases} \gamma_{t-s}, \text{ 当 } t-s = 2k \\ 0, \text{ 当 } t-s = 2k+1 \end{cases}$$

即 $\{z_t\}$ 的自协方差函数仅是时间间隔的函数. 所以 z_t 是宽平稳序列.

2. 假设序列 $\{x_t\}$ 服从 AR(1) 过程，$x_t = \phi x_{t-1} + \varepsilon_t$，且 $|\phi| < 1$，$\varepsilon_t \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} (0, \sigma_\varepsilon^2)$.

(1) 推导 $\{x_t\}$ 自协方差函数 $\gamma_x(k)$, $k \geqslant 0$ 的表达式. (3 分)

(2) 令 $z_t = x_t - x_{t-1}$，以 ϕ 和 σ_ε^2 表示 $\{z_t\}$ 的自协方差函数 $\gamma_z(k)$，$k \geqslant 1$. (3 分)

(3) 证明 $\mathrm{Var}(z_t) = 2\sigma_\varepsilon^2/(1+\phi)$. (4 分)

参考答案

(1) $\gamma_x(k) = \phi^k \gamma_x(0)$，$(1-\phi B)x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j} \Rightarrow \gamma_x(0) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}$，所以 $\gamma_x(k) = \phi^k \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}$

(2)

$$\begin{aligned} \gamma_z(k) &= \mathrm{Cov}(z_t, z_{t-k}) \\ &= \mathrm{Cov}(x_t - x_{t-1}, x_{t-k} - x_{t-1-k}) \\ &= (\mathrm{Cov}(x_t, x_{t-k}) + \mathrm{Cov}(x_t, -x_{t-k-1}) + \mathrm{Cov}(-x_{t-1}, x_{t-k}) + \mathrm{Cov}(-x_{t-1}, -x_{t-k-1})) \\ &= \left(\phi^k - \phi^{k+1} - \phi^{k-1} + \phi^k\right) \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2} \\ &= \left[2\phi - \phi^2 - 1\right] \phi^{k-1} \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2} \\ &= -\left[(1-\phi)^2\right] \phi^{k-1} \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2} = -\left[\frac{1-\phi}{1+\phi}\right] \phi^{k-1} \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

(3) 计算

$$\mathrm{Var}(z_t) = \mathrm{Var}(x_t - x_{t-1}) = \mathrm{Var}(x_t) + \mathrm{Var}(x_{t-1}) - 2\,\mathrm{Cov}(x_t, x_{t-1}) = 2(1-\phi)\frac{\sigma_e^2}{1-\phi^2} = \frac{2\sigma_e^2}{1+\phi}$$

3. 分别讨论如下模型，并回答问题

(1) 将 $x_t = x_{t-1} - 0.25x_{t-2} + \varepsilon_t - 0.1\varepsilon_{t-1}$ 表示成 ARIMA(p, d, q) 模型，并确定 p, d, q. (5 分)

(2) 通过计算说明 $x_t = 0.5x_{t-1} - 0.5x_{t-2} + \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1} + 0.25\varepsilon_{t-2}$ 是否是平稳模型. (5 分)

参考答案

(1) 形式上是 ARMA 模型，且是 ARMA(2, 1)，$\phi_1 = 1, \phi_2 = 0.25, \theta_1 = 0.1$，需要进一步确认 ARMA(2, 1) 模型的平稳性和可逆性. 因为 $\phi_1 + \phi_2 = 0.75 < 1, \phi_2 - \phi_1 = -1.25 < 1$，且 $|\phi_2| = 0.25 < 1$，$1-\theta_1 x$ 的根 $1/\theta_1 > 1$，所以原模型是平稳可逆 ARMA(2, 1) 模型，$p = 2, d = 0, q = 1$.

(2) 形式上是 ARMA(2, 2) 模型，$\phi_1 = 0.5, \phi_2 = -0.5, \theta_1 = 0.5, \theta_2 = -0.25$，$\phi_1+\phi_2 = 0 < 1, \phi_2-\phi_1 = -1 < 1$，且 $|\phi_2| = 0.5 < 1$，所以是平稳模型.

4. 序列 $\{x_t\}$ 是宽平稳序列，k 阶自协方差函数记作 $\gamma_x(k)$，简记为 γ_k，相应的 k 阶自相关系数记作 ρ_k.

(1) 令 $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_t$，以 γ_k 表示 $\bar{x}$ 的方差 $\mathrm{Var}(\bar{x})$. (5 分)

(2) 记 $\hat{\rho}_k$ 为 $\{x_t\}$ 的 k 阶样本自相关系数，

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=k+1}^{n}(x_t - \bar{x})(x_{t-k} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^{n}(x_t - \bar{x})^2} \quad \text{for } k = 1, 2, \ldots$$

并假设 $\{x_t\}$ 有 MA(∞) 表示形式，$x_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j \varepsilon_{t-j}$，且 $\sum_{j=0}^{\infty}|\psi_j| < \infty$，$\sum_{j=0}^{\infty} j\psi_j^2 < \infty$，则对于任意正整数 m，$\left(\sqrt{n}(\hat{\rho}_1 - \rho_1), \sqrt{n}(\hat{\rho}_2 - \rho_2), \ldots, \sqrt{n}(\hat{\rho}_m - \rho_m)\right)$ 在 $n \to \infty$ 时渐进服从均值为 $\mathbf{0}$，方差协方差矩阵为 $\mathbf{C}$ 的多元正态分布，记作 $N(\mathbf{0}, \mathbf{C})$，且 $\mathbf{C}$ 在 (i, j) 位置的元素

$$c_{ij} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\rho_{k+i}\rho_{k+j} + \rho_{k-i}\rho_{k+j} - 2\rho_i\rho_k\rho_{k+j} - 2\rho_j\rho_k\rho_{k+i} + 2\rho_i\rho_j\rho_k^2\right).$$

假设 $x_t = \phi x_{t-1} + \varepsilon_t$，且 $|\phi| < 1$，$\varepsilon_t \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} (0, \sigma_\varepsilon^2)$，试通过计算说明在 $n \to \infty$ 时

$$\mathrm{Var}(\hat{\rho}_k) \approx \frac{1}{n}\left[\frac{(1+\phi^2)(1-\phi^{2k})}{1-\phi^2} - 2k\phi^{2k}\right]$$

并解释为什么在 $\phi \approx \pm 1$ 时，$\hat{\rho}_k$ 对 ρ_k 的估计不够精确. (15 分)

参考答案

(1) 令 $\mu = \mathrm{E}(\bar{x}) = \mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_t\right)$，计算

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\bar{x}) &= \mathrm{E}\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_t - \mu\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_t - \mu\right)\right] \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{E}(x_i - \mu)(x_j - \mu) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i,j}\gamma(i-j) = \frac{1}{n}\sum_{k=-(n-1)}^{n-1}\left(1 - \frac{|k|}{n}\right)\gamma_k
\end{aligned}$$

(2) 由 AR(1) 过程 $x_t = \phi x_{t-1} + \varepsilon_t$ 可知 $\rho_k = \phi^k$，并根据题目中给出的结论有在 $n \to \infty$ 时，

$$\mathrm{Var}(\hat{\rho}_j) \approx \frac{1}{n}c_{jj}.$$

计算 c_{jj}，不失一般性假设 $j \geqslant 1$

$$
\begin{aligned}
c_{jj} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\rho_{k+j}\rho_{k+j}+\rho_{k-j}\rho_{k+j}-2\rho_j\rho_k\rho_{k+j}-2\rho_j\rho_k\rho_{k+j}+2\rho_j\rho_j\rho_k^2\right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\rho_{k+j}^2+\rho_{k-j}\rho_{k+j}-4\rho_j\rho_k\rho_{k+j}+2\rho_j^2\rho_k^2\right) \\
&= \left(1+2\rho_j^2\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\rho_k^2+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\rho_{k-j}\rho_{k+j}-4\rho_j\sum_{k=-\infty}^{\infty}\rho_k\rho_{k+j}
\end{aligned}
$$

将 $\rho_k = \phi^k$ 代入分别计算

$$
\sum_{k=-\infty}^{\infty}\rho_k^2 = 1+2\sum_{k=1}^{\infty}\phi^{2k} = 1+2\frac{\phi^2}{1-\phi^2} = \frac{1+\phi^2}{1-\phi^2} \tag{1}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty}\rho_{k-j}\rho_{k+j} &= \sum_{k=-\infty}^{-j-1}\phi^{j-k-k-j}+\sum_{k=-j}^{j-1}\phi^{j-k+k+j}+\sum_{k=j}^{\infty}\phi^{k-j+k+j} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{-j-1}\phi^{-2k}+\sum_{k=-j}^{j-1}\phi^{2i}+\sum_{k=j}^{\infty}\phi^{2k} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{-j-1}\phi^{-2k}+\sum_{k=-j}^{j-1}\phi^{2j}+\sum_{k=j}^{\infty}\phi^{2k} \\
&= \frac{\phi^{2(j+1)}}{1-\phi^2}+2j\phi^{2j}+\frac{\phi^{2j}}{1-\phi^2} \\
&= \phi^{2j}\left(\frac{1+\phi^2}{1-\phi^2}\right)+2j\phi^{2j}
\end{aligned} \tag{2}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty}\rho_k\rho_{k+j} &= \sum_{k=-\infty}^{-j}\phi^{-k}\phi^{-k-j}+\sum_{k=-j+1}^{0}\phi^{-k}\phi^{k+j}+\sum_{k=1}^{\infty}\phi^k\phi^{k+j} \\
&= \phi^{-j}\sum_{k=j}^{\infty}\phi^{2k}+j\phi^j+\phi^j\sum_{k=1}^{\infty}\phi^{2k} \\
&= \frac{\phi^j}{1-\phi^2}+j\phi^j+\phi^j\left(\frac{\phi^2}{1-\phi^2}\right) \\
&= \left(\frac{1+\phi^2}{1-\phi^2}\right)\phi^j+j\phi^j
\end{aligned} \tag{3}
$$

将 (1), (2) 和 (3) 分别带入 c_{jj} 整理并令 $j = k$ 有

$$
\operatorname{Var}(\hat{\rho}_k) \approx \frac{1}{n}\left[\frac{\left(1+\phi^2\right)\left(1-\phi^{2k}\right)}{1-\phi^2}-2k\phi^{2k}\right].
$$

由该近似表达式可知，在 $\phi \approx \pm 1$ 时，$\hat{\rho}_k$ 的方差较大，因此在 $\phi \approx \pm 1$ 时，$\hat{\rho}_k$ 对 ρ_k 的估计不够精确.

5. 对于平稳中心化序列 $\{x_t\}$,考虑 AR(p) 模型，$x_t = \phi_1 x_{t-1}+\phi_2 x_{t-2}+\cdots+\phi_p x_{t-p}+\varepsilon_t$，$\varepsilon_t \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} (0, \sigma_\varepsilon^2)$
   (1) 证明 $\sigma_\varepsilon^2 = \gamma(0) - \boldsymbol{\phi}^\top\boldsymbol{\gamma}$，其中 $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \cdots, \phi_p)^\top$，$\boldsymbol{\gamma} = (\gamma(1), \cdots, \gamma(p))^\top$，$\gamma(k)$ 表示 k 阶自协方差函数，$1 \leqslant k \leqslant p$（提示： Yule-Walker 方程）. (10 分)
   (2) 当 $p = 2$ 时，已知样本 1 阶样本自相关系数和 2 阶样本自相关系数分别为 $\hat{\rho}_1 = 0.427$ 和 $\hat{\rho}_2 = 0.475$，并且已知样本方差 $\hat{\gamma}(0) = 1.15$. 通过矩方法估计 ϕ_1, ϕ_2, 和 σ_ε^2，分别记为 $\hat{\phi}_1$，

$\hat{\phi}_2$，和 $\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2$（提示：$\gamma(k)=\gamma(0)\rho(k)$，并且不考虑以残差平方和的均值作为 σ_{ε}^2 的估计）. (10 分)

(3) 在 (2) 的基础上，当 $k \geqslant 1$ 时，估计 AR(2) 模型的偏自相关系数. (10 分)

参考答案

(1) 由平稳性可知，

$$\operatorname{Var}(x_t) = \boldsymbol{\phi}^{\top}\boldsymbol{\Gamma}_p\boldsymbol{\phi} + \sigma_{\varepsilon}^2$$

由 Yule-Walker 方程可知 $\boldsymbol{\Gamma}_p\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\gamma}$. 并且，$\operatorname{Var}(x_t) = \gamma(0)$，所以

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = \gamma(0) - \boldsymbol{\phi}^{\top}\boldsymbol{\gamma}$$

(2) 由 Yule-Walker 方程可知

$$\begin{bmatrix}\rho_1\\ \rho_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\rho_0 & \rho_1\\ \rho_1 & \rho_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{bmatrix}$$

所以

$$\begin{bmatrix}\hat{\phi}_1\\ \hat{\phi}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\rho_0 & \hat{\rho}_1\\ \hat{\rho}_1 & \rho_0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\hat{\rho}_1\\ \hat{\rho}_2\end{bmatrix}$$

具体的有

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_1 &= \frac{1-\hat{\rho}_2}{1-\hat{\rho}_1^2}\hat{\rho}_1 = \frac{1-0.475}{1-0.427^2}0.427 \approx 0.274\\ \hat{\phi}_2 &= \frac{\hat{\rho}_2-\hat{\rho}_1^2}{1-\hat{\rho}_1^2} = \frac{0.475-0.427^2}{1-0.427^2} \approx 0.358\end{aligned}$$

并且由 (1) 中的结果可知

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 &= \hat{\gamma}(0) - \hat{\boldsymbol{\phi}}^{\top}\hat{\boldsymbol{\gamma}}\\ &= \hat{\gamma}(0)\left\{1-\begin{bmatrix}\hat{\rho}_1 & \hat{\rho}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\rho_0 & \hat{\rho}_1\\ \hat{\rho}_1 & \rho_0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\hat{\rho}_1\\ \hat{\rho}_2\end{bmatrix}\right\}\\ &\approx 0.8199\end{aligned}$$

(3) 由偏自相关系数的定义可知，$\widehat{\mathrm{PACF}}(1) = \hat{\rho}_1 = 0.427$，$\widehat{\mathrm{PACF}}(2) = \hat{\phi}_2 = 0.358$，并且由 AR(2) 模型的偏自相关系数的截尾性可知，对 $k \geqslant 3$，$\widehat{\mathrm{PACF}}(k) = 0$.

6. 假设 $\varepsilon_t \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \left(0, \sigma^2\right)$ 且 $x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t$，$x_0 = 0$.

(1) 计算 $\frac{1}{T^{5/2}} \sum_{t=1}^{T} t x_{t-1}$ 的方差，(10 分)

$$\mathrm{Var}\left(\frac{1}{T^{5/2}} \sum_{t=1}^{T} t x_{t-1}\right)$$

(2) 计算 $\lim_{T\to\infty} \mathrm{Var}\left(\frac{1}{T^{5/2}} \sum_{t=1}^{T} t x_{t-1}\right)$，并在连续时间下基于 Brownian 运动进一步讨论该结果. (10 分)

参考答案

(1)

$$\mathrm{Var}\left(\frac{1}{T^{5/2}} \sum_{t=1}^{T} t x_{t-1}\right) = \frac{1}{T^5} \mathrm{Var}\left(\sum_{t=1}^{T} t x_{t-1}\right)$$

注意到，

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{T} t x_{t-1} &= 1x_0 + 2x_1 + 3x_2 + \ldots + T x_{T-1} \\
&= 2\varepsilon_1 + 3\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\right) + 4\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3\right) + \ldots + T\left(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{T-1}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{j=i}^{T-1} (j+1)\varepsilon_i \\
&= \sum_{i=1}^{T-1} \left[\left(\frac{(i+T-1)(T-i)}{2}\right) + (T-i)\right] \varepsilon_i
\end{aligned}$$

因为 $\varepsilon_t \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \left(0, \sigma^2\right)$，所以

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left(\sum_{t=1}^{T} t x_{t-1}\right) &= \mathrm{Var}\left\{\sum_{i=1}^{T-1} \left[\left(\frac{(i+T-1)(T-i)}{2}\right) + (T-i)\right] \varepsilon_i\right\} \\
&= \sigma^2 \sum_{i=1}^{T-1} \left[\frac{(i+T+1)(T-i)}{2}\right]^2
\end{aligned}$$

(2) 注意到，

$$\begin{aligned}
\left[\frac{(i+T+1)(T-i)}{2}\right]^2 &= \frac{\left[-i^2 - i + (T+1)T\right]^2}{4} \\
&= \frac{1}{4} i^4 + \frac{2}{4} i^3 - \frac{2(T+1)T}{4} i^2 + \frac{1}{4} i^2 - \frac{2(T+1)T}{4} i + \frac{(T+1)^2 T^2}{4}
\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \frac{1}{T^5} \sum_{i=1}^{T-1} i^4 &= \frac{1}{5} \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{1}{T^5} \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{T-1} i^4 = \frac{1}{20} \\
\lim_{t\to\infty} \frac{1}{T^3} \sum_{i=1}^{T-1} i^2 &= \frac{1}{4} \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{1}{T^5} \frac{2(T+1)T}{4} \sum_{i=1}^{T-1} i^2 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{T^5} \sum_{i=1}^{T-1} \frac{(T+1)^2 T^2}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{T^5} \sum_{i=1}^{T-1} i^3 = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{T^5} \sum_{i=1}^{T-1} i^2 = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{T^5} \frac{2(T+1)T}{4} \sum_{i=1}^{T-1} i = 0$$

所以

$$\lim_{T\to\infty} \operatorname{Var}\left(\frac{1}{T^{5/2}}\sum_{t=1}^{T} t x_{t-1}\right) = \left(\frac{1}{20} - \frac{2}{3}\times\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)\sigma^2 = \frac{2}{15}\sigma^2.$$

同时，根据泛函型中心定理，

$$\frac{1}{T^{5/2}}\sum_{t=1}^{T} t x_{t-1} = \frac{1}{T}\sum_{t=1} \frac{t}{T}\frac{x_{t-1}}{\sqrt{T}} \xrightarrow{d} \sigma\int_0^1 rW(r)dr$$

其中，$W(r)$ 表示定义在 $[0,1]$ 上的 Brownian 运动，并由 Brownian 运动的性质

$$\mathbb{E}\left[\sigma\int_0^1 rW(r)dr\right] = 0$$

有

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}\left(\sigma\int_0^1 rW(r)dr\right) &= \mathbb{E}\left[\left(\sigma\int_0^1 rW(r)dr\right)^2\right] \\
&= \sigma^2\mathbb{E}\left[\left(\int_0^1 rW(r)dr\right)^2\right] \\
&= \sigma^2\mathbb{E}\left[\int_0^1\int_0^1 rsW(r)W(s)drds\right] \\
&= \sigma^2\int_0^1\int_0^1 rs\mathbb{E}\left[W(r)W(s)\right]drds \\
&= \sigma^2\int_0^1\int_0^1 rs\min\{r,s\}drds \\
&= \sigma^2\int_0^1\int_0^r rs^2dsdr + \sigma^2\int_0^1\int_r^1 r^2sdsdr \\
&= \sigma^2\int_0^1 \frac{1}{3}r^4dr + \sigma^2\int_0^1\left(\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{2}r^4\right)dr \\
&= \sigma^2\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right) = \sigma^2\left(\frac{2}{30} + \frac{5}{30} - \frac{3}{30}\right) = \frac{2}{15}\sigma^2
\end{aligned}$$

其中，从第 5 个等式到第 6 个等式由 Brownian 运动的性质得到：

$$\mathbb{E}\left[W(r)W(s)\right] = \min\{r,s\}.$$

事实上，不失一般性，假设 $r > s$ 则

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[W(r)W(s)\right] &= \mathbb{E}\left[W(r) - W(s) + W(s), W(s)\right] \\
&= \underbrace{\mathbb{E}\left[\left(W(r) - W(s)\right)W(s)\right]}_{\substack{=0 \\ \text{Brownian 运动, 独立增量}}} + \mathbb{E}\left[W(s)^2\right] = s
\end{aligned}$$