时间序列分析（初级）：期中考试试卷（开卷）

2024-25 第一学期

任课教师: 陈垚翰

安徽大学 大数据与统计学院

考试时间：2024年10月28日-2024年11月4日

- 试卷总共有 6 道大题；
- 2、3、4、5、6 大题含有多个小题；
- 完成所有问题并详细展示必要的推导和演算过程；
- 可以参阅课本、讲义和相关资料，但是必须独立完成试题；
- 打印试卷，并用 A4 作业纸作答，将试卷与作业纸装订提交；
- 试卷总分为 100 分；
- 在 2024 年 11 月 4 日（周一）课前交卷；
- Good Luck!

1. 设 $\{x_t\}$ 和 $\{y_t\}$ 是相互独立的平稳序列，并且有相同的均值和自协方差函数．定义序列如下

$$z_t = \begin{cases} x_t, t = 2n+1 \\ y_t, t = 2n \end{cases}$$

其中 n 为非负整数，讨论并说明 $\{z_t\}$ 是否是宽平稳序列. (10 分)

2. 假设序列 $\{x_t\}$ 服从 AR(1) 过程，$x_t = \phi x_{t-1} + \varepsilon_t$，且 $|\phi| < 1$，$\varepsilon_t \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} (0, \sigma_\varepsilon^2)$.

   (1) 推导 $\{x_t\}$ 自协方差函数 $\gamma_x(k)$, $k \geqslant 0$ 的表达式. (3 分)

   (2) 令 $z_t = x_t - x_{t-1}$，以 ϕ 和 σ_ε^2 表示 $\{z_t\}$ 的自协方差函数 $\gamma_z(k)$，$k \geqslant 1$. (3 分)

   (3) 证明 $\operatorname{Var}(z_t) = 2\sigma_\varepsilon^2/(1+\phi)$. (4 分)

3. 分别讨论如下模型，并回答问题

   (1) 将 $x_t = x_{t-1} - 0.25x_{t-2} + \varepsilon_t - 0.1\varepsilon_{t-1}$ 表示成 ARIMA(p, d, q) 模型，并确定 p, d, q. (5 分)

   (2) 通过计算说明 $x_t = 0.5x_{t-1} - 0.5x_{t-2} + \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1} + 0.25\varepsilon_{t-2}$ 是否是平稳模型. (5 分)

4. 序列 $\{x_t\}$ 是宽平稳序列，k 阶自协方差函数记作 $\gamma_x(k)$，简记为 γ_k，相应的 k 阶自相关系数记作 ρ_k.

   (1) 令 $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_t$，以 γ_k 表示 $\bar{x}$ 的方差 $\operatorname{Var}(\bar{x})$. (5 分)

   (2) 记 $\hat{\rho}_k$ 为 $\{x_t\}$ 的 k 阶样本自相关系数，

   $$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=k+1}^{n}(x_t - \bar{x})(x_{t-k} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^{n}(x_t - \bar{x})^2} \quad \text{for } k = 1, 2, \ldots$$

   并假设 $\{x_t\}$ 有 MA(∞) 表示形式，$x_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j\varepsilon_{t-j}$，且 $\sum_{j=0}^{\infty}\left|\psi_j\right| < \infty$，$\sum_{j=0}^{\infty} j\psi_j^2 < \infty$，则对于任意正整数 m，$\left(\sqrt{n}(\hat{\rho}_1 - \rho_1), \sqrt{n}(\hat{\rho}_2 - \rho_2), \ldots, \sqrt{n}(\hat{\rho}_m - \rho_m)\right)$ 在 $n \to \infty$ 时渐进服从均值为 $\mathbf{0}$，方差协方差矩阵为 $\mathbf{C}$ 的多元正态分布，记作 $N(\mathbf{0}, \mathbf{C})$，且 $\mathbf{C}$ 在 (i, j) 位置的元素

   $$c_{ij} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\rho_{k+i}\rho_{k+j} + \rho_{k-i}\rho_{k+j} - 2\rho_i\rho_k\rho_{k+j} - 2\rho_j\rho_k\rho_{k+i} + 2\rho_i\rho_j\rho_k^2\right).$$

   假设 $x_t = \phi x_{t-1} + \varepsilon_t$，且 $|\phi| < 1$，$\varepsilon_t \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} (0, \sigma_\varepsilon^2)$，试通过计算说明在 $n \to \infty$ 时

   $$\operatorname{Var}(\hat{\rho}_k) \approx \frac{1}{n}\left[\frac{(1+\phi^2)(1-\phi^{2k})}{1-\phi^2} - 2k\phi^{2k}\right]$$

   并解释为什么在 $\phi \approx \pm 1$ 时，$\hat{\rho}_k$ 对 ρ_k 的估计不够精确. (15 分)

5. 对于平稳中心化序列 $\{x_t\}$,考虑 AR(p) 模型，$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t$，$\varepsilon_t \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} (0, \sigma_\varepsilon^2)$

   (1) 证明 $\sigma_\varepsilon^2 = \gamma(0) - \boldsymbol{\phi}^\top\boldsymbol{\gamma}$，其中 $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \cdots, \phi_p)^\top$，$\boldsymbol{\gamma} = (\gamma(1), \cdots, \gamma(p))^\top$，$\gamma(k)$ 表示 k 阶自协方差函数，$1 \leqslant k \leqslant p$（提示： Yule-Walker 方程）. (10 分)

   (2) 当 $p = 2$ 时，已知样本 1 阶样本自相关系数和 2 阶样本自相关系数分别为 $\hat{\rho}_1 = 0.427$ 和 $\hat{\rho}_2 = 0.475$，并且已知样本方差 $\hat{\gamma}(0) = 1.15$. 通过矩方法估计 ϕ_1, ϕ_2, 和 σ_ε^2，分别记为 $\hat{\phi}_1$，$\hat{\phi}_2$，和 $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$（提示： $\gamma(k) = \gamma(0)\rho(k)$，并且不考虑以残差平方和的均值作为 σ_ε^2 的估计）. (10 分)

   (3) 在 (2) 的基础上，当 $k \geqslant 1$ 时，估计 AR(2) 模型的偏自相关系数. (10 分)

6. 假设 $\varepsilon_t \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} (0, \sigma^2)$ 且 $x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t$，$x_0 = 0$.

(1) 计算 $\frac{1}{T^{5/2}} \sum_{t=1}^{T} t x_{t-1}$ 的方差，(10 分)

$$\operatorname{Var}\left(\frac{1}{T^{5/2}} \sum_{t=1}^{T} t x_{t-1}\right)$$

(2) 计算 $\lim_{T\to\infty} \operatorname{Var}\left(\frac{1}{T^{5/2}} \sum_{t=1}^{T} t x_{t-1}\right)$，并在连续时间下基于 Brownian 运动进一步讨论该结果. (10 分)