# 时间序列分析：作业 2

1. 对于平稳中心化序列 $\{x_t\}$ ,考虑 AR$(p)$ 模型，$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t$，$\varepsilon_t \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \left(0, \sigma_\varepsilon^2\right)$
   (1) 证明 $\sigma_\varepsilon^2 = \gamma(0) - \boldsymbol{\phi}^\top \boldsymbol{\gamma}$，其中 $\boldsymbol{\phi} = \left(\phi_1, \cdots, \phi_p\right)^\top$，$\boldsymbol{\gamma} = (\gamma(1), \cdots, \gamma(p))^\top$（提示：Yule-Walker 方程）
   (2) 当 $p = 2$ 时，已知样本 1 阶样本自相关系数和 2 阶样本自相关系数分别为 $\hat{\rho}_1 = 0.427$ 和 $\hat{\rho}_2 = 0.475$，并且已知样本方差 $\hat{\gamma}(0) = 1.15$. 通过矩方法估计 $\phi_1, \phi_2$, 和 $\sigma_\varepsilon^2$，分别记为 $\hat{\phi}_1$，$\hat{\phi}_2$，和 $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$（提示：$\gamma(k) = \gamma(0)\rho(k)$，并且不考虑残差平方和的均值为 $\sigma_\varepsilon^2$ 的估计）
   (3) 在 (2) 的基础上，计算当 $k \geqslant 1$ 时，AR(2) 模型的偏自相关系数.

2. 令

$$u_t = \psi(B)\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$$

其中，$\varepsilon_t \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} (0, \sigma^2)$，$\psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j$，且 $\sum_{j=0}^{\infty} j|\psi_j| < \infty$.

   (1) 说明 $\{u_t\}$ 是宽平稳序列.
   (2) 通过计算证明

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{t} u_i &= \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{i-j} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i + \eta_t - \eta_0\end{aligned}$$

   其中，

$$\eta_t = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \varepsilon_{t-j}, \quad \alpha_j = -\left(\psi_{j+1} + \psi_{j+2} + \ldots\right)$$

   并说明 $\{\eta_t\}$ 是宽平稳序列.
   (3) 假设 $y_t$ 由 ARIMA$(p, 1, q)$ 生成，且 $u_t = \nabla y_t$，利用 (1) 和 (2) 中的结果说明 $y_t$ 可以分解成 ARIMA(0,1,0) 序列和平稳序列之和.