时间序列分析：作业 2

1. 对于平稳中心化序列 $\{x_t\}$,考虑 AR(p) 模型，$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t$，$\varepsilon_t \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \left(0, \sigma_\varepsilon^2\right)$
   (1) 证明 $\sigma_\varepsilon^2 = \gamma(0) - \boldsymbol{\phi}^\top \boldsymbol{\gamma}$，其中 $\boldsymbol{\phi} = \left(\phi_1, \cdots, \phi_p\right)^\top$，$\boldsymbol{\gamma} = (\gamma(1), \cdots, \gamma(p))^\top$（提示： Yule-Walker 方程）
   (2) 当 $p = 2$ 时，已知样本 1 阶样本自相关系数和 2 阶样本自相关系数分别为 $\hat{\rho}_1 = 0.427$ 和 $\hat{\rho}_2 = 0.475$，并且已知样本方差 $\hat{\gamma}(0) = 1.15$. 通过矩方法估计 ϕ_1, ϕ_2, 和 σ_ε^2，分别记为 $\hat{\phi}_1$，$\hat{\phi}_2$，和 $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$（提示： $\gamma(k) = \gamma(0)\rho(k)$，并且不考虑残差平方和的均值为 σ_ε^2 的估计）
   (3) 在 (2) 的基础上，计算当 $k \geqslant 1$ 时，AR(2) 模型的偏自相关系数

参考答案.

(1) 由平稳性可知，

$$\operatorname{Var}(x_t) = \boldsymbol{\phi}^\top \boldsymbol{\Gamma}_p \boldsymbol{\phi} + \sigma_\varepsilon^2$$

由 Yule-Walker 方程可知 $\boldsymbol{\Gamma}_p \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\gamma}$. 并且，$\operatorname{Var}(x_t) = \gamma(0)$，所以

$$\sigma_\varepsilon^2 = \gamma(0) - \boldsymbol{\phi}^\top \boldsymbol{\gamma}$$

(2) 由 Yule-Walker 方程可知

$$\begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_0 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

所以

$$\begin{bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_0 & \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_1 & \rho_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \end{bmatrix}$$

具体的有

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_1 &= \frac{1 - \hat{\rho}_2}{1 - \hat{\rho}_1^2} \hat{\rho}_1 = \frac{1 - 0.475}{1 - 0.427^2} 0.427 \approx 0.274 \\ \hat{\phi}_2 &= \frac{\hat{\rho}_2 - \hat{\rho}_1^2}{1 - \hat{\rho}_1^2} = \frac{0.475 - 0.427^2}{1 - 0.427^2} \approx 0.358 \end{aligned}$$

并且由 (1) 中的结果可知

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_\varepsilon^2 &= \hat{\gamma}(0) - \hat{\boldsymbol{\phi}}^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}} \\ &= \hat{\gamma}(0) \left\{ 1 - \begin{bmatrix} \hat{\rho}_1 & \hat{\rho}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_0 & \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_1 & \rho_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \end{bmatrix} \right\} \\ &\approx 0.8199 \end{aligned}$$

(3) 由偏自相关系数的定义可知，$\widehat{\text{PACF}}(1) = \hat{\rho}_1 = 0.427$，$\widehat{\text{PACF}}(2) = \hat{\phi}_2 = 0.358$，并且由 AR(2) 模型的偏自相关系数的截尾性可知，对 $k \geqslant 3$，$\widehat{\text{PACF}}(k) = 0$.

□

2. 令

$$u_t = \psi(B)\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$$

其中，$\varepsilon_t \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} (0, \sigma^2)$，$\psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j$，且 $\sum_{j=0}^{\infty} j|\psi_j| < \infty$.

(1) 说明 $\{u_t\}$ 是宽平稳序列.

参考答案

由 MA(∞) 的形式可知，说明 $\{u_t\}$ 的平稳性只需要证明

$$\text{Var}\,(u_t) = \sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j|^2 < \infty$$

而显然 $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j|^2 < \left(\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j|\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j|\right)$，$\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \sum_{j=0}^{\infty} j|\psi_j| < \infty$，所以 $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j|^2 < \infty$

(2) 通过计算证明

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{t} u_i &= \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{i-j} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i + \eta_t - \eta_0 \end{aligned}$$

其中，

$$\eta_t = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \varepsilon_{t-j}, \quad \alpha_j = -\left(\psi_{j+1} + \psi_{j+2} + \ldots\right)$$

并说明 $\{\eta_t\}$ 是宽平稳序列.

参考答案

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{t} u_i &= \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j\varepsilon_{i-j} \\
&= \{\psi_0\varepsilon_t+\psi_1\varepsilon_{t-1}+\psi_2\varepsilon_{t-2}+\cdots+\psi_t\varepsilon_0+\psi_{t+1}\varepsilon_{-1}+\cdots\} \\
&\quad +\{\psi_0\varepsilon_{t-1}+\psi_1\varepsilon_{t-2}+\psi_2\varepsilon_{t-3}+\cdots+\psi_{t-1}\varepsilon_0+\psi_t\varepsilon_{-1}+\cdots\} \\
&\quad +\{\psi_0\varepsilon_{t-2}+\psi_1\varepsilon_{t-3}+\psi_2\varepsilon_{t-4}+\cdots+\psi_{t-2}\varepsilon_0+\psi_{t-1}\varepsilon_{-1}+\cdots\} \\
&\quad +\cdots+\{\psi_0\varepsilon_1+\psi_1\varepsilon_0+\psi_2\varepsilon_{-1}+\cdots\} \\
&= \psi_0\varepsilon_t+(\psi_0+\psi_1)\,\varepsilon_{t-1}+(\psi_0+\psi_1+\psi_2)\,\varepsilon_{t-2}+\cdots \\
&\quad +(\psi_0+\psi_1+\psi_2+\cdots+\psi_{t-1})\,\varepsilon_1+(\psi_1+\psi_2+\cdots+\psi_t)\,\varepsilon_0 \\
&\quad +(\psi_2+\psi_3+\cdots+\psi_{t+1})\,\varepsilon_{-1}+\cdots \\
&= (\psi_0+\psi_1+\psi_2+\cdots)\,\varepsilon_t-(\psi_1+\psi_2+\psi_3+\cdots)\,\varepsilon_t \\
&\quad +(\psi_0+\psi_1+\psi_2+\cdots)\,\varepsilon_{t-1}-(\psi_2+\psi_3+\cdots)\,\varepsilon_{t-1} \\
&\quad +(\psi_0+\psi_1+\psi_2+\cdots)\,\varepsilon_{t-2}-(\psi_3+\psi_4+\cdots)\,\varepsilon_{t-2}+\cdots \\
&\quad +(\psi_0+\psi_1+\psi_2+\cdots)\,\varepsilon_1-(\psi_t+\psi_{t+1}+\cdots)\,\varepsilon_1 \\
&\quad +(\psi_1+\psi_2+\psi_3+\cdots)\,\varepsilon_0-(\psi_{t+1}+\psi_{t+2}+\cdots)\,\varepsilon_0 \\
&\quad +(\psi_2+\psi_3+\psi_4+\cdots)\,\varepsilon_{-1}-(\psi_{t+2}+\psi_{t+3}+\cdots)\,\varepsilon_{-1}+\cdots
\end{aligned}
$$

即 $\sum_{i=1}^{t} u_i=\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j\sum_{i=1}^{t}\varepsilon_i+\eta_t-\eta_0$，

$$
\begin{aligned}
\eta_t &= \underbrace{-(\psi_1+\psi_2+\psi_3+\cdots)}_{\alpha_0}\varepsilon_t\underbrace{-(\psi_2+\psi_3+\psi_4+\cdots)}_{\alpha_1}\varepsilon_{t-1} \\
&\quad \underbrace{-(\psi_3+\psi_4+\psi_5+\cdots)}_{\alpha_2}\varepsilon_{t-2}-\cdots \\
\eta_0 &= \underbrace{-(\psi_1+\psi_2+\psi_3+\cdots)}_{\alpha_0}\varepsilon_0\underbrace{-(\psi_2+\psi_3+\psi_4+\cdots)}_{\alpha_1}\varepsilon_{-1} \\
&\quad \underbrace{-(\psi_3+\psi_4+\psi_3+\cdots)}_{\alpha_2}\varepsilon_{-2}-\cdots.
\end{aligned}
$$

此外，

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty}\left|\alpha_j\right| &= |\psi_1+\psi_2+\psi_3+\cdots|+|\psi_2+\psi_3+\psi_4+\cdots|+|\psi_3+\psi_4+\psi_5+\cdots|+\cdots \\
&\leqslant \{|\psi_1|+|\psi_2|+|\psi_3|+\cdots\}+\{|\psi_2|+|\psi_3|+|\psi_4|+\cdots\}+\{|\psi_3|+|\psi_4|+|\psi_s|+\cdots\}+\cdots \\
&= |\psi_1|+2\,|\psi_2|+3\,|\psi_3|+\cdots \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} j|\psi_j|<\infty
\end{aligned}
$$

所以，$\eta_t=\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j\varepsilon_{t-j}$ 是宽平稳序列.

(3) 假设 y_t 由 ARIMA$(p,1,q)$ 生成，且 $u_t=\nabla y_t$，利用 (1) 和 (2) 中的结果说明 y_t 可以分解成 ARIMA(0,1,0) 序列和平稳序列之和.

参考答案

$$y_t = \sum_{i=1}^{t} \nabla y_i + y_0 = \sum_{i=1}^{t} u_i + y_0 = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i + \eta_t + (Y_0 - \eta_0)\,,$$

其中，$\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$ 是 ARIMA$(0,1,0)$ 序列，η_t 由 (2) 可知是平稳序列. 这一分解也称之为 Beveridge-Nelson 分解.