

时间序列分析：作业 1

1. 考虑随机变量 $\{X_n\}$, 且 $\mathbb{P}(X_n = \sqrt{n}) = \frac{1}{n}$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$, 说明 $\{X_n\}$ 是否依概率收敛?

2. 考虑线性回归模型 $y = X\beta + u$, 其中

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & n \end{pmatrix}$$

且 u 为随机误差向量满足 $\mathbb{E}(u | X) = 0$ 且 $\text{Var}(u | X) = \sigma^2 I_n$. 显然, 该线性回归模型可以等价的表示为 $y_t = \beta_1 + \beta_2 t + u_t$, 其中 $\beta = (\beta_1, \beta_2)'$, $t = 1, \dots, n$.

(1) 说明 $\frac{1}{n} X^T X$ 是否收敛到一个正定矩阵 (positive definite matrix)?

(2) 说明 $X^T X \rightarrow 0$? 这个收敛性可以用于说明 β 的最小二乘估计量 (OLS) 的什么性质? 请通过计算说明。

3. 对于中心化的 ARMA(p, q) 模型 $\Phi(B)x_t = \Theta(B)\varepsilon_t$, $\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$, $1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$, $\varepsilon_t \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} (0, \sigma_\varepsilon^2)$, 证明该 ARMA(p, q) 模型可以表示成 $x_t + \sum_{i=1}^{\infty} I_i x_{t-i}$, 并以递归形式给出 $\{I_i\}_{i=0}^{\infty}$ 的表达式。

4. 考虑 AR(1) 模型 $x_t = \phi x_{t-1} + \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} (0, \sigma_\varepsilon^2)$, $|\phi| < 1$

(1) 对任意 i , 计算 $\sigma_x^2 = \text{Var}(x_t)$, $\text{Cov}(x_t, x_{t+i})$.

(2) 通过计算说明 $\hat{\phi}_{ols} = \frac{\frac{1}{T} \sum x_t x_{t-1}}{\frac{1}{T} \sum x_{t-1}^2} \equiv \frac{U_T}{V_T}$, $U_T = \frac{1}{T} \sum x_t x_{t-1}$, $V_T = \frac{1}{T} \sum x_{t-1}^2$.

(3) Priestley (1981) 有如下公式

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(x_t x_{t+r} x_s x_{s+r+v}) &= \mathbb{E}(x_t x_{t+r}) \mathbb{E}(x_s x_{s+r+v}) + \mathbb{E}(x_t x_s) \mathbb{E}(x_{t+r} x_{s+r+v}) \\ &\quad + \mathbb{E}(x_t x_{s+r+v}) \mathbb{E}(x_{t+r} x_s) \end{aligned}$$

通过计算说明

$$\begin{aligned} \text{Cov}(x_t^2, x_s x_{s+1}) &= 2 \mathbb{E}(x_t x_s) \mathbb{E}(x_t x_{s+1}) = 2 \text{Cov}(x_t, x_s) \text{Cov}(x_t, x_{s+1}) \\ \text{Cov}(x_t^2, x_s^2) &= 2 \mathbb{E}(x_t x_s) \mathbb{E}(x_t x_s) = 2 [\text{Cov}(x_t, x_s)]^2. \end{aligned}$$

(4) 计算 $\text{Cov}(U_T, V_T)$, $\text{Var}(V_T)$.

(5) 通过计算说明

$$\mathbb{E}(\hat{\phi}_{ols}) = \mathbb{E}\left(\frac{U_T}{V_T}\right) = \frac{\mathbb{E}(U_T)}{\mathbb{E}(V_T)} - \frac{\text{Cov}(U_T, V_T)}{\mathbb{E}^2(V_T)} + \frac{\mathbb{E}(U_T) \text{Var}(V_T)}{\mathbb{E}^3(V_T)} + o(T^{-1}).$$

(6) 在(1)-(5)的基础上通过计算说明

$$\mathbb{E}(\hat{\phi}_{ols}) = \phi - \frac{2\phi}{T} + o(T^{-1}).$$