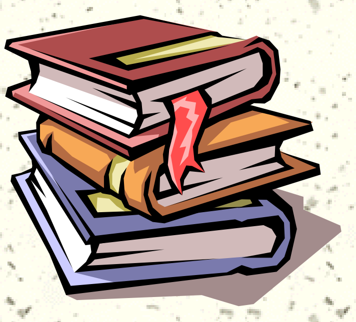
第五章　贝叶斯决策



第五章　贝叶斯决策

第一节　贝叶斯决策问题

一、决策问题分类

(1)仅使用先验信息的决策问题称为无数据(或无样本信息)的决策问题;

(2)仅使用抽样信息的决策问题称为统计决策问题;

(3)先验信息和抽样信息都使用的决策问题称为贝叶斯决策问题.

二、贝叶斯决策问题

先验信息和抽样信息都用的决策问题称为贝叶斯决策问题。若以下条件已知，则我们认为一个贝叶斯决策问题给定了。

(1) $X \sim p(x|\theta), \theta \in \Theta$

(2) $\theta \sim \pi(\theta)$

(3) $\mathrm{A} = \{a\}$

(4) 定义在 $\Theta \times A$ 上的二元函数 $L(\theta, a)$ 称为损失函数

三、贝叶斯决策的优缺点

1.优点主要表现在:

(1)贝叶斯决策充分利用各种信息,使决策结果更加科学化;

(2)能对调查结果的可能性加以数量化的评价;

(3)贝叶斯决策巧妙地将调查结果和先验知识有机地结合起来;

(4)贝叶斯决策过程可以不断地使用,使决策结果逐步完善.

2.缺点:

(1)贝叶斯决策所需要的数据多，分析计算也比较复杂,如果解决的问题比较复杂时,这个矛盾就更加突出;

(2)在决策的过程中，有些数据必须要使用主观概率,有些人不是很相信,这也妨碍了贝叶斯决策方法的推广和使用.　O

第二节 后验风险决策

1.后验风险函数

我们把损失函数 $L(\theta,a)$ 对后验分布 $\pi(\theta|x)$ 的期望称为后验风险,记 $R(a|x)$,即

$$R(a|x)=E^{\theta|x}[L(\theta,a)]=\begin{cases}\sum_i L(\theta_i,a)\pi(\theta_i|x)\\ \int_\Theta L(\theta,a)\pi(\theta|x)d\theta\end{cases}$$

后验风险就是用后验分布计算的平均损失. 11

2.决策函数

定义5.1 在给定的贝叶斯决策问题中,从样本空间 $\chi=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\}$ 到行动集A上的一个映照 $\delta(x)$ 称为该决策问题的一个决策函数, $D=\{\delta(x)\}$ 表示所有从样本空间χ 到A上的决策函数组成的类,称为决策函数类.

在贝叶斯决策中我们面临的是决策函数类D,要在D中选择决策函数 $\delta(x)$,使其风险最小.

例题分析

3.后验风险准则

定义 在给定的贝叶斯决策问题中 $D=\{\delta(x)\}$是其决策函数类,则称

$$R(\delta|x)=E^{\theta|x}[L(\theta,\delta(x))],x\in\chi,\theta\in\Theta$$

为决策函数 $\delta=\delta(x)$ 的后验风险.假如在决策函数类中存在这样的决策函数 $\delta'=\delta'(x)$,它在D中有最小的风险,即

$$R(\delta'|x)=\min_{\delta\in D}R(\delta|x)$$

则称$\delta'=\delta'(x)$为后验风险准则下的最优决策函数,或称贝叶斯决策,或贝叶斯解,或**贝叶斯估计**。

注: (1)定义中的条件:给定的贝叶斯决策问题

(2)定义中的先验分布允许是广义的.

例1 设 $x=(x_1,\cdots,x_n)$是来自正态分布N(θ ,1)的一个样本。又设参数θ 的先验分布为共轭先验分布N(0,τ²),其中τ²已知.而损失函数为0-1损失函数

$$L(\theta,\delta)=\begin{cases}0, |\delta-\theta|\le\varepsilon\\ 1, |\delta-\theta|>\varepsilon\end{cases}$$

试求参数θ 的贝叶斯估计。

解:分三步求解:

(1)求参数θ 的后验分布 $\pi(\theta\mid x)=N\left(\dfrac{\sum x_i}{n+\tau^{-2}},(n+\tau^{-2})^{-1}\right)$

(2)对于任意一个决策函数$\delta=\delta(x)$计算后验风险函数:

$$R(\delta\mid x)=\int_{-\infty}^{+\infty}L(\theta,\delta)\pi(\theta\mid x)d\theta=\int_{|\delta-\theta|>\varepsilon}\pi(\theta\mid x)d\theta$$

$$=P^{\theta|x}(|\delta-\theta|>\varepsilon)=1-P^{\theta|x}(|\delta-\theta|\le\varepsilon)$$

(3)求出使得上述风险函数达到最小时的决策函数:

$$\delta_\tau(x)=\sum x_i\Big/(n+\tau^{-2})$$

例2 在市场占有率θ 的估计问题中，已知损失函数为：

$$L(\theta,\delta)=\begin{cases}2(\delta-\theta), & 0<\theta<\delta \\ \theta-\delta, & \delta\le\theta\le 1\end{cases}$$

药厂厂长对市场占有率θ 无任何先验信息，另外在市场调查中，在n个购买止痛剂的顾客中有x人买了新药，试在后验风险准则下对θ 作出贝叶斯估计。

解:(1)求参数θ 的后验分布：结果为 Be(x+1,n-x+1)

(2) $\forall\delta=\delta(x)$，计算风险函数

$$R(\delta\,|\,x)=\int_0^1 L(\theta,\delta)\pi(\theta\,|\,x)d\theta=2\int_0^\delta(\delta-\theta)\pi(\theta\,|\,x)d\theta+$$

$$\int_\delta^1(\theta-\delta)\pi(\theta\,|\,x)d\theta=3\int_0^\delta(\delta-\theta)\pi(\theta\,|\,x)d\theta+E(\theta\,|\,x)-\delta$$

(3)求最优行动使上述风险函数达到最小.令:

$$\frac{dR(\delta\,|\,x)}{d\delta}=3\int_0^\delta\pi(\theta\,|\,x)d\theta-1=0$$

则得: $\int_0^\delta\pi(\theta\,|\,x)d\theta=\frac{1}{3}$

(4)数值计算:

例3　如何判断一个样本是来自密度函数为$p_0(x)$ 的总体还是来自密度函数为$p_1(x)$ 的总体。

解:两个假设:

$$H_0: x\text{来自}p_0(x), H_1: x\text{来自}p_1(x)$$

问题:接受H_0还是H_1?

(1)把假设检验问题转化为贝叶斯决策问题:

①参数空间$\Theta=\{0, 1\}$

②行动空间$A=\{0, 1\}$

③先验分布:$P(\theta=0)=\pi_0$,

$P(\theta=1)=\pi_1$

④损失函数:决策正确无损失,决策错误的损失为1. 则

$$L=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2)求后验分布:

$$P(\theta=i \mid x)=\begin{cases} \dfrac{p_0(x)\pi_0}{p_0(x)\pi_0+p_1(x)\pi_1}, i=0 \\ \dfrac{p_1(x)\pi_1}{p_0(x)\pi_0+p_1(x)\pi_1}, i=1 \end{cases}$$

(3)计算每个行动下的后验风险:$R(a=0 \mid x)=P(\theta=1 \mid x)$

$R(a=1 \mid x)=P(\theta=0 \mid x)$

(4)找出最佳行动,即确定拒绝域.

$$\delta^*(x)=\begin{cases} 0, & \dfrac{p_1(x)}{p_0(x)}<\dfrac{\pi_0}{\pi_1} \\ 1, & \dfrac{p_1(x)}{p_0(x)} \geq \dfrac{\pi_0}{\pi_1} \end{cases}$$

第三节 常用损失函数下的贝叶斯估计

1. 平方损失函数下的贝叶斯估计

定理5.1 在平方损失函数$L(\theta,\delta)=(\delta-\theta)^2$下，$\theta$ 的贝叶斯估计为后验均值,即

$$\delta_B(x)=E(\theta|x)$$

[Pr] 在平方损失函数下,任何一个决策函数$\delta=\delta(x)$的后验风险为$E[(\delta-\theta)^2|x]=\delta^2-2\delta E(\theta|x)+E(\theta^2|x)$

$$令\ \frac{dE[(\delta-\theta)^2|x]}{d\delta}=2\delta-2E(\theta|x)=0$$

得：$\delta=E(\theta|x)$

定理5.2 在加权平方损失函数 $L(\theta,\delta)=\lambda(\theta)(\delta-\theta)^2$下，θ 的贝叶斯估计为:

$$\delta_B(x)=\frac{E[\lambda(\theta)\theta\mid x]}{E[\lambda(\theta)\mid x]}$$

其中λ（θ ）为参数空间Θ 上的正值函数.

定理5.3 在参数向量 $\theta'=(\theta_1,\cdots,\theta_k)$ 的场合下,对多元二次损失函数 $L(\theta,\delta)=(\delta-\theta)'Q(\delta-\theta)$,Q为正定阵，θ 的贝叶斯估计为后验均值向量:

$$\delta_B(x)=E(\theta\mid x)=\begin{pmatrix} E(\theta_1\mid x) \\ \vdots \\ E(\theta_k\mid x) \end{pmatrix}$$

例4 设 $x=(x_1,\cdots,x_n)$是来自泊松分布 $P(X=x)=\dfrac{\theta^x}{x!}e^{-\theta}$ 的一个样本.若θ 的先验分布用其共轭先验分布G(α ,λ),即

$$\pi(\theta)=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}e^{-\lambda\theta},\theta>0$$

其中参数α与λ 已知.求平方损失函数下θ 的贝叶斯估计.

解:解题过程分为以下三步:

(1)根据题意求出θ 的后验分布 $Ga(n\bar{x}+\alpha,n+\lambda)$

(2)写出后验均值 $E(\theta\,|\,\mathbf{x})=\dfrac{n\bar{x}+\alpha}{n+\lambda}$

(3)结论:由定理5.1知θ 的贝叶斯估计为:

$$\delta_B(\mathbf{x})=\frac{n\bar{x}+\alpha}{n+\lambda}=\frac{n}{n+\lambda}\bar{x}+\frac{\lambda}{n+\lambda}\cdot\frac{\alpha}{\lambda}$$

例5 设 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 是来自均匀分布U(0, θ)的一个样本.又设θ 的先验分布为Pareto分布.在损失函数分别为绝对值损失函数和平方损失函数下求θ 的贝叶斯估计.

解题步骤:

第一步:求θ 的后验分布:

$$\pi(\theta \mid x)=\frac{(\alpha+n)\theta_1^{\alpha+n}}{\theta^{\alpha+n+1}},\theta>\theta_1$$

第二步:在绝对值损失函数下θ 的贝叶斯估计:恰为后验分布的中位数.

第三步:平方损失函数下θ 的贝叶斯估计:

$$\hat{\theta}_{B1}=\frac{(\alpha+n)\theta_1}{\alpha+n-1}$$

Pareto分布的分布函数:

$$F(\theta)=1-\left(\frac{\mu}{\theta}\right)^{\alpha},\theta>\mu$$

密度函数为:

$$p(\theta)=\frac{\alpha}{\mu}\left(\frac{\mu}{\theta}\right)^{\alpha+1},\theta>\mu$$

期望: $E(\theta)=\alpha\mu/(\alpha-1),\alpha>1$

方差:

$$Var(\theta)=\frac{\alpha\mu^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)},\alpha>2$$

中位数:μ

例6 贝叶斯决策在可靠性统计中的应用

问题的描述:假设某产品的寿命T服从指数分布,其分布函数为:

$$F(t)=1-e^{-\lambda t}, t>0$$

把指定时间t_0后该产品才失效的概率

$$R(t_0)=P(T>t_0)=e^{-\lambda t_0}$$

称为产品在t_0时刻的可靠度。在平方损失函数下怎样估计可靠度$R(t_0)$?

2. 线性损失函数下的贝叶斯估计

定理5.4 在绝对值损失函数L(θ,δ)=|θ-δ|下，θ的贝叶斯估计$\delta_B(x)$为后验分布π(θ|x)的中位数.

证明:(1)证明的思路:

设m为π(θ|x)的中位数,要证明定理成立,即要证: $\forall \delta \in D$,

都有 $R(m|x) \le R(\delta|x)$

即 $E^{\theta|x}[L(\theta,m)-L(\theta,\delta)] \le 0$

(2)证明的过程:先证δ>m的情形,此时:

$$L(\theta,m)-L(\theta,\delta)$$

$$=\begin{cases} m-\delta, & \theta \le m < \delta \\ 2\theta-(m+\delta), & m<\theta<\delta \\ \delta-m, & m<\delta\le\theta \end{cases}$$

当m<θ<δ时,2θ-(m+δ)<2δ-(m+δ)=δ-m,故

$$L(\theta,m)-L(\theta,\delta)$$

$$=\begin{cases} m-\delta, & \theta \le m \\ \delta-m, & m<\delta\le\theta \end{cases}$$

因此 $E^{\theta|x}[L(\theta,m)-L(\theta,\delta)]$

$$\le (m-\delta)P(\theta\le m|x)$$

$$+(\delta-m)P(\theta>m|x)$$

$$=(m-\delta)/2+(\delta-m)/2=0$$

(3)同理可证δ<m的情形。

定理5.5 在线性损失函数: $L(\theta,\delta)=\begin{cases}k_0(\theta-\delta), & \delta\le\theta\\ k_1(\delta-\theta), & \delta>\theta\end{cases}$

下, θ 的贝叶斯估计$\delta_n(x)$为后验分布π（θ ｜x）的 $k_0/(k_0+k_1)$ 分位数.

证明:(1)计算任一决策函数δ=δ(x)的后验风险:

$$R(\delta|x)=\int_{-\infty}^{+\infty}L(\theta,\delta)\pi(\theta|x)d\theta$$

$$=k_1\int_{-\infty}^{\delta}(\delta-\theta)\pi(\theta|x)d\theta+k_0\int_{\delta}^{+\infty}(\theta-\delta)\pi(\theta|x)d\theta$$

$$=(k_1+k_0)\int_{-\infty}^{\delta}(\delta-\theta)\pi(\theta|x)d\theta+k_0(E(\theta|x)-\delta)$$

(2)求R(δ|x)的驻点:令

$$\frac{dR(\delta|x)}{d\delta}=(k_0+k_1)\int_{-\infty}^{\delta}\pi(\theta|x)d\theta-k_0=0\Rightarrow\int_{-\infty}^{\delta}\pi(\theta|x)d\theta=\frac{k_0}{k_0+k_1}$$

(3)结论: θ 的贝叶斯估计是后验分布的 $k_0/(k_0+k_1)$ 分位数.

例9(p191例题5.13)自学

3. 有限个行动问题的假设检验

(1) 一般问题：设A={a_1, a_2, …, a_r}，在a_i下的损失为L(θ , a_i)，如何从这些行动当中选择一个最优行动?(使后验期望损失 $E^{\theta|\mathbf{x}}L(\theta,a_i)$ 达到最小的行动)

(2) 特例：r=2的情形，即二个行动的假设检验问题

(3) 特例：r=3的情形(三个行动的假设检验问题)

(儿童智商检验的实例P193)

二个行动的假设检验问题

1.问题的描述:

有两个假设: $H_0:\theta\in\Theta_0,\ H_1:\theta\in\Theta_1$

两个行动:a_0:表示接受H_0的行动,

a_1:表示接受H_1的行动.

决策方法:如果$\theta\in\Theta_0$,则认为a_0为最优行动;

如果$\theta\in\Theta_1$,则认为a_1为最优行动.

2.损失函数的确定:确定原则:决策正确无损失,决策错误损失k_i个单位.则得到损失矩阵:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} a_0 & a_1 \end{array} \\ L= & \begin{pmatrix} 0 & k_1 \\ k_0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \theta_0 \\ \theta_1 \end{array}$$

3.计算每个行动的后验期望损失：假设后验分布已经求出,则

$$R(a_0 \mid x) = E^{\theta|x} L(a_0, \theta) = \int_{\Theta_1} k_0 \pi(\theta \mid x) d\theta = k_0 P(\Theta_1 \mid x)$$

$$R(a_1 \mid x) = E^{\theta|x} L(a_1, \theta) = \int_{\Theta_0} k_1 \pi(\theta \mid x) d\theta = k_1 P(\Theta_0 \mid x)$$

4.按照后验风险准则,确定最优行动:

如果 $R(a_0 \mid x) > R(a_1 \mid x)$,即： $k_0 P(\Theta_1 \mid x) > k_1 P(\Theta_0 \mid x)$ 则应选择a_1,拒绝a_0.

如果 $R(a_0 \mid x) < R(a_1 \mid x)$,即： $k_0 P(\Theta_1 \mid x) < k_1 P(\Theta_0 \mid x)$ 则应选择a_0,拒绝a_1.

5.确定拒绝域:

若 $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$,则 $P(\Theta_0 \mid x) = 1 - P(\Theta_1 \mid x)$

则由上一步可算得: $P(\Theta_1 \mid x) > \dfrac{k_1}{k_0 + k_1}$

即拒绝域 $W = \{x : P(\Theta_1 \mid x) > \dfrac{k_1}{k_0 + k_1}\}$

第四节　抽样信息期望值

一、基本概念

1.完全信息：对需要作决策的问题，假如决策者所获得的信息足以肯定那一个状态即将发生，则该信息就称为(该状态的)完全信息。

2.完全信息期望值(EVPI)：设某决策问题有n种状态θ_1，θ_2, …, θ_n,且各种状态的先验概率$\pi(\theta_i)$已知,又有m种行动a_1, a_2, …, a_m。设Q_{ij}为出现θ_i采取行动a_j的收益，a′为使$E^{\theta}[Q(\theta_i,a_j)]$ 取得最大时的行动，则称

$$E^{\theta}[\max_{a_j}\{Q(\theta_i,a_j)\}]-\max_{a_j}\{E^{\theta}[Q(\theta_i,a_j)]\}$$

为完全信息期望值，记为EVPI。

3. **先验EVPI**：在一个决策问题中π(θ)是状态集Θ={θ}上的先验分布。a′是先验期望准则下的最优行动，则在a′下的损失函数L(θ，a′)的先验期望 $E^{\theta}L(\theta,a')$ 称为完全信息先验期望值，记为先验EVPI。

4. 两者的关系:

$$EVPI=\sum_{i=1}^{n}(\max_{a_j} Q_{ij})\pi(\theta_i)-\sum_{i=1}^{n}Q_{ik}\pi(\theta_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(\max_{a_j} Q_{ij}-Q_{ik})\pi(\theta_i)=\sum_{i=1}^{n}L_{ik}\pi(\theta_i)$$

$$=E^{\theta}[L(\theta_i,a_k)]$$

5.例题:对给定的Q或L怎样计算EVPI和先验EVPI？如：

$$Q=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 10 & 50 & 100 \\ 9 & 40 & 30 \\ 6 & -20 & -60 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{array} \leftrightarrow L=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 90 & 50 & 0 \\ 31 & 0 & 10 \\ 0 & 26 & 66 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{cc} \theta_1 & 0.6 \\ \theta_2 & 0.3 \\ \theta_3 & 0.1 \end{array}$$

二、抽样信息期望值

1.定义：在一个贝叶斯决策问题中，a′是先验期望准则下的最优行动，$\delta'(x)$是后验风险准则下的最优决策函数。则先验EVPI与后验EVPI期望值的差称为抽样信息期望值，记为：

$$EVSI = E^{\theta}L(\theta,a') - E^{x}E^{\theta|x}L(\theta,\delta'(x))$$

2.计算一个EVSI的基本步骤：

第一步：计算先验EVPI；

第二步：计算θ 的后验分布；

第三步：计算每个行动的后验期望损失$E^{\theta|x}L(\theta,a)$；

第四步：确定最优决策函数；

第五步：计算后验EVPI；

第六步：计算后验EVPI的期望值；

第七步：计算抽样信息期望值。

案例分析

甲厂的某一零件由乙厂生产，每批1000只，其次品率θ 的概率分布如下表所示：

θ	0.02	0.05	0.10
π（θ ）	0.45	0.39	0.16

甲厂在整机装配时，如发现零件是次品，必须更换，每换一只，乙厂赔偿2.20元的损失费，但也可以在送装前采取全部检查的办法，使每批零件的次品率降为1%，但乙厂必须支付每只0.10元的检查费。乙厂面临如下两种选择：

a_1:一批中一件都不检查

a_2:一批中每件都检查

若乙厂厂长想从每批中任取三只零件进行抽查，根据不合格品个数来决定是采取行动a_1还是行动a_2，并想知道这样能否带来更大的收益？

分析过程

一、计算先验EVPI：

支付函数：$W(\theta,a_1)=1000\theta\times 2.20=2200\theta$

$W(\theta,a_2)=1000\times 0.10+1000\times 1\%\times 2.20=122$

由此的支付矩阵和损失矩阵：

$$W=\begin{array}{cc} a_1 & a_2 \end{array}\begin{pmatrix} 44 & 122 \\ 110 & 122 \\ 220 & 122 \end{pmatrix} \qquad L=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 78 \\ 0 & 12 \\ 98 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{array}$$

计算每个行动下的先验期望损失：$E^{\theta}L(\theta,a_1)=15.68$

$E^{\theta}L(\theta,a_2)=39.78$ 由此得在先验期望准则下，a1是最优行动，

则：先验EVPI=15.68

2.计算的后验分布

x	0	1	2	3
m(x)	0.8745	0.1176	0.0076	0.0002

x	0	1	2	3
$\theta_1=0.02$	0.4843	0.2202	0.0658	0.0028
$\theta_2=0.05$	0.3824	0.4490	0.3684	0.0190
$\theta_3=0.10$	0.1333	0.3308	0.5658	0.9782

3.计算各行动的后验期望损失

x	0	1	2	3
$E^{\theta\|x}L(\theta,a_1)$	13.0634	32.4148	55.4484	95.8636
$E^{\theta\|x}L(\theta,a_2)$	42.3642	22.5636	9.5532	0.4464

4.确定最优决策函数:

$$\delta'(x)=\begin{cases}a_1, & x=0\\ a_2, & x=1,2,3\end{cases}$$

5.计算后验EVPI：x=0时，后验EVPI=13.0634

x=1时，后验EVPI=22.5636

x=2时，后验EVPI=9.5532

x=3时，后验EVPI=0.4494

6.计算后验EVPI的期望值:

$$E^x E^{\theta|x} L(\theta,\delta'(x)) = 13.0634\times0.8745+22.5636\times0.1176$$
$$+9.5532\times0.0076+0.4494\times0.0002$$
$$=14.1501$$

7.计算抽样信息期望值:

EVSI=15.68−14.15

思考：该厂长所确定的抽取三件产品检查，是否是最好？

第五节　最佳样本量的确定

一、抽样净益

1.抽样成本:抽样费用称为抽样成本,记为$C(n)=C_f+C_v\cdot n\quad(n\geq1)$
其中C_f是固定成本,C_v是可变成本.

2.抽样净益:从抽样信息期望值中扣除抽样成本所剩下的净收益.记为ENGS,即$ENGS(n)=EVSI(n)-C(n)$

二、最佳样本量及其上界

1.最佳样本量:使得抽样净益达到最大的样本量n*称为最佳样本量. 即 $ENGS(n^*)=\max\limits_{n>0}ENGS(n)$

2.上界的确定: $n^*\leq\dfrac{\text{先验}EVPI-C_f}{C_v}$

三、最佳样本量的求法

第六节　二行动线性决策问题的EVPI

一、正态分布下二行动线性决策问题的先验EVPI

二、贝塔分布下二行动线性决策问题的先验EVPI

三、伽玛分布下二行动线性决策问题的先验EVPI

案例分析

某厂的产品每100件装成一箱运交顾客.在向顾客交货前面临如下二中选择:a_1:一箱中逐一检查;a_2一箱中一件也不检查.若工厂选择a_1,则可保证交货时每件产品都是合格品,但因每件产品的检查费为0.8元,为此工厂要支付检查费80元/箱.若工厂选择a_2,虽可免去每箱80元的检查费,但一旦顾客发现不合格品时,不仅要免费更换,而且每件还要支付12.5元的赔偿费.假设该厂产品的不合格率θ 没有超过0.12的记录.根据下列不同的情形,作出相应的最优决策.

(1)不作任何抽样,怎样做决策?（解答）

(2)每箱中抽取两件进行检查,结果如何?（解答）

(3)每箱中抽取三件进行检查,结果又如何?　　B

决策函数

x	0	1	2
$\delta_1(x)$	a_1	a_1	a_1
$\delta_2(x)$	a_1	a_1	a_2
$\delta_3(x)$	a_1	a_2	a_1
$\delta_4(x)$	a_1	a_2	a_2
$\delta_5(x)$	a_2	a_1	a_1
$\delta_6(x)$	a_2	a_1	a_2
$\delta_7(x)$	a_2	a_2	a_1
$\delta_8(x)$	a_2	a_2	a_2

各决策函数的后验风险

x	0	1	2
$R(\delta_1 \mid x)$	22.2030	15.0483	2.7986
$R(\delta_2 \mid x)$	22.2030	15.0483	36.8924
$R(\delta_3 \mid x)$	22.2030	55.9783	2.7986
$R(\delta_4 \mid x)$	22.2030	55.9783	36.8924
$R(\delta_5 \mid x)$	15.6159	15.0483	2.7986
$R(\delta_6 \mid x)$	15.6159	15.0483	36.8924
$R(\delta_7 \mid x)$	15.6159	55.9783	2.7986
$R(\delta_8 \mid x)$	15.6159	55.9783	36.8924

（1）第一步：由支付函数确定损失函数：

支付函数

$$W(\theta,a)=\begin{cases}80, & a=a_1\\ 12.5\times100\theta, & a=a_2\end{cases}$$

其中 $\theta\in(0,1)$。这是一个典型的决策问题。这时相应的损失函数可由支付函数换算得

$$L(\theta,a_1)=\begin{cases}80-1250\theta, & \theta\leqslant\theta_0\\ 0, & \theta>\theta_0\end{cases}$$

$$L(\theta,a_2)=\begin{cases}0, & \theta\leqslant\theta_0\\ -80+1250, & \theta>\theta_0\end{cases}$$

其中 $\theta_0=0.064$。

第二步：计算每一个行动的先验期望损失

B

假如工厂从产品检查部门发现，该厂产品的不合格品率 θ 没有超过 0.12 的纪录。若取区间(0,0.12)上的均匀分布作为 θ 的先验分布，又在决策中使用这个先验分布。则就构成一个无数据的决策问题。在这个决策问题中可以分别算得行动 a_1 和行动 a_2 的先验期望损失

$$\bar{L}(a_1)=\frac{1}{0.12}\int_0^{\theta_0}(80-1250\theta)d\theta$$

$$=8.33(80\theta_0-1250\theta_0^2/2)$$

$$=21.32(元/箱)$$

$$\bar{L}(a_2)=8.33\int_{\theta_0}^{0.12}(-80+1250\theta)d\theta$$

$$=8.33[-80(0.12-\theta_0)+1250(0.12^2-\theta_0^2)/2]$$

$$=16.33(元/箱)$$

按先验期望损失愈小愈好原则，应取行动 a_2，即每箱中一件都不检查可使工厂损失小。

（2）第一步：由支付函数确定损失函数：

假如工厂决定先在每箱中抽取两件进行检查，设 X 为其不合格品数，则 $X\sim b(2,\theta)$。然后工厂根据 X 的取值(可能取 0,1,2 三种)再选择行动 a_1 或行动 a_2。这时工厂的支付函数为

$$W(\theta,a)=\begin{cases}80, & a=a_1\\ 1.6+1250\theta, & a=a_2\end{cases}$$

相应的损失函数为

$$L(\theta,a_1)=\begin{cases}78.4-1250\theta, & \theta\leqslant\theta_0\\ 0, & \theta>\theta_0\end{cases}$$

$$L(\theta,a_2)=\begin{cases}0, & \theta\leqslant\theta_0\\ -78.4+1250\theta, & \theta>\theta_0\end{cases}$$

其中 $\theta_0=0.06272$。此种利用抽样信息的决策问题就是统计决策问

第二步：计算后验分布：

产品的不合格品率 θ 不超过0.12。且取均匀分布 $U(0,0.12)$ 作为 θ 的先验分布，由此例即可得 x 与 θ 的联合分布

$$h(x,\theta)=c^{-1}\binom{2}{x}\theta^{x}(1-\theta)^{2-x},x=0,1,2,\quad 0<\theta<0.12$$

其中 $c=0.12$。x 的边缘分布为

$$m(x) = c^{-1}\binom{2}{x}\int_0^c \theta^x(1-\theta)^{2-x}d\theta$$

这个积分并不复杂，但要在 x 给定下才能算出，为此在 $x=0,1,2,$ 情况下分别计算

$$m(0)=c^{-1}\int_0^c(1-\theta)^2d\theta = c^{-1}[c-c^2+c^3/3]$$

$$=1-c+c^2/3=0.8848$$

$$m(1)=2c^{-1}\int_0^c \theta(1-\theta)d\theta=2c^{-1}[c^2/2-c^3/3]$$

$$=c-2c^2/3=0.1104$$

$$m(3)=c^{-3}\int_0^c \theta^2 d\theta=c^2/3=0.0048$$

这样就得到 x 的边缘分布

θ	0	1	2
$m(x)$	0.8848	0.1104	0.0048

接着在 $x=0,1,2$ 给定下，容易写出 θ 的后验分布

$$\pi(\theta|x=0)=c^{-1}(1-\theta)^2/0.8848=9.4183(1\theta)^2\quad,0<\theta<0.12$$

$$\pi(\theta|x=1)=2c^{-1}\theta(1-\theta)/0.1104$$

$$=150.9662\theta(1-\theta)\quad,0<\theta<0.12$$

$$\pi(\theta|x=2)=c^{-1}\theta^2/0.0048=1736.1111\theta^2\quad,0<\theta<0.12$$

第三步：利用后验风险准则做决策

计算每一个决策行动的后验风险

$$R(a_1|x=0)=\int_0^{\theta_0}(78.4-1250\theta)\times 9.4183(1-\theta)^2d\theta$$

$$=9.4183\int_0^{\theta_0}(78.4-1406.8\theta+2578.4\theta^2$$

$$-1250\theta^3)d\theta$$

$$=22.2030$$

$$R(a_2|x=2)=1736.1111\times\int_{\theta_0}^{0.12}(-78.4+1250\theta)\theta^2d\theta$$

$$=1736.1111\times[-78.4\theta^3/3+1250\theta^4/4]_{\theta_0}^{0.12}$$

$$=36.8924$$

其余的后验风险可类似算得。现在6个后验风险列表如下

表 5.1 例 5.3 的后验风险

$R(a\|x)$	x		
a	0	1	2
a_1	22.2030	15.0483	2.7986
a_2	15.6159	55.9783	36.8924

如何从表5.1上按后验风险最小的准则挑选最优行动呢？假如选 a_1，那么在 $x=0$ 时 a_1 的后验风险下是最小的。假如选 a_2，那么 $x=1,2$ 时 a_2 的后验风险不是最小的。这时最优行动应随着样本观察值 x 的变化而变化。即

$$a=\begin{cases} a_2, & x=0 \\ a_1, & x=1,2 \end{cases}$$

这表明最优行动应是样本 x 的函数。为了准确表达这一点，需要决策函数的概念。