时间序列分析（初级）

条件异方差模型

陈堃翰

安徽大学 大数据与统计学院

本章结构

- 异方差
- ARCH 模型
- GARCH 模型

异方差

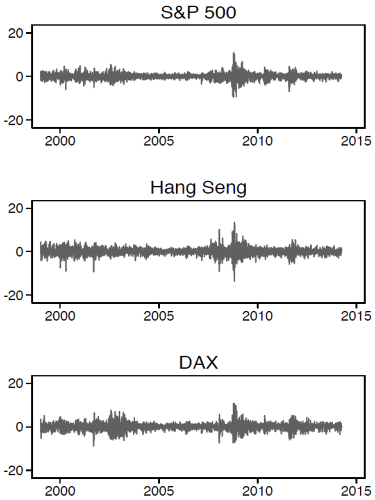
异方差的定义

- 随机误差序列的方差随时间的变换而变化

$$\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma_t^2$$

- 置信区间、检验统计量的计算很多时候与方差有关，而同方差
（方差齐性，Homoskedasticity），并不总能满足实际建模的需要

典型性事实展示:时变波动率



方差齐性变换

- 适用场合：$\sigma_t^2 = h(\mu_t)$
- 对于异方差序列 x_t 考虑转换函数 $g(\cdot)$ 使得 $g(x_t)$ 满足方差齐性：

$$\mathrm{Var}\left[g(x_t)\right] = \sigma^2$$

- 1 阶 Taylor 展开并求方差

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left[g\left(x_t\right)\right] &\cong \mathrm{Var}\left[g\left(\mu_t\right) + \left(x_t - \mu_t\right) g'\left(\mu_t\right)\right] \\ &= \left[g'\left(\mu_t\right)\right]^2 h\left(\mu_t\right)\end{aligned}$$

- 转换函数的确定

$$g'\left(\mu_t\right) = \frac{1}{\sqrt{h\left(\mu_t\right)}}$$

一种常用的转换函数

- 假定

$$h\left(\mu_t\right) = \mu_t^2$$

- 转换函数的确定

$$g'\left(\mu_t\right) = \frac{1}{\sqrt{h\left(\mu_t\right)}} = \frac{1}{\mu_t} \Rightarrow g\left(\mu_t\right) = \log\left(\mu_t\right)$$

两种简单波动率模型

- 收益率的局部样本方差：

$$h_t = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{M} r_{t-j}^2. \tag{1}$$

其中 r_t 代表 t 时刻的收益率，M 代表局部估计区间的长度

- 指数型移动平均（EWMA）：

$$
\begin{aligned}
h_t &= (1-\lambda)\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j r_{t-j-1}^2 \\
&= (1-\lambda)\, r_{t-1}^2 + (1-\lambda)\left[\lambda r_{t-2}^2 + \lambda^2 r_{t-3}^2 + \cdots\right] \\
&= (1-\lambda) r_{t-1}^2 + (1-\lambda)\lambda\left[r_{t-2}^2 + \lambda r_{t-3}^2 + \cdots\right] \\
&= (1-\lambda)\, r_{t-1}^2 + \lambda h_{t-1}. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

常数 λ 为衰减参数（decay parameter）。衰减参数 λ 在 RiskMetrics Group 的经验取值为 $\lambda = 0.94$

ARCH 模型

ARCH(q) 模型

- ARCH(q)

$$
\begin{aligned}
x_t &= f\left(t, x_{t-1}, x_{t-2}, \cdots\right) + \varepsilon_t \\
\varepsilon_t &= \sqrt{h_t} e_t \\
h_t &= \lambda_0 + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \varepsilon_{t-j}^2
\end{aligned}
$$

其中 $e_t \overset{i.i.d.}{\sim} (0,1)$, $\quad \mathbb{E}\left(e_t\right) = 0, \quad \mathbb{E}\left(e_t^2\right) = 1$

- 条件异方差（conditional heteroskedasticity）

$$\mathbb{E}\left(\varepsilon_t^2 \mid \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \cdots\right) = h_t$$

- 约束条件
    - $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_q \geqslant 0$
    - $\sum_{j=1}^{q} \lambda_j < 1$

GARCH 模型

GARCH(p, q) 模型

- GARCH(p, q)

$$
\begin{aligned}
x_t &= f\left(t, x_{t-1}, x_{t-2}, \cdots\right) + \varepsilon_t \\
\varepsilon_t &= \sqrt{h_t} e_t, \quad e_t \overset{i.i.d.}{\sim} (0, 1), \quad \mathbb{E}\left(e_t\right) = 0, \quad \mathbb{E}\left(e_t^2\right) = 1 \\
h_t &= \lambda_0 + \sum_{i=1}^{p} \eta_i h_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \varepsilon_{t-j}^2
\end{aligned}
$$

- 条件异方差（conditional heteroskedasticity）

$$\mathbb{E}\left(\varepsilon_t^2 \mid h_{t-1}, h_{t-2}, \cdots, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \cdots\right) = h_t$$

- 约束条件
  - $0 \leqslant \eta_i < 1, \quad i = 1, 2, \cdots, p$
  - $0 \leqslant \lambda_i < 1, \quad i = 1, 2, \cdots, q$
  - $0 \leqslant \sum_{i=1}^{p} \eta_i + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j < 1$

GARCH(1, 1)

- 当 $p = 1, q = 1$ 时，GARCH(1, 1) 模型设定为如下形式

$$h_t = \lambda_0 + \lambda_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \eta_1 h_{t-1}. \tag{1}$$

	GARCH(1, 1)	EWMA
模型形式	$h_t = \lambda_0 + \lambda_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \eta_1 h_{t-1}$	$h_t = (1-\lambda)\, r_{t-1}^2 + \lambda h_{t-1}$
参数	$\lambda_0, \lambda_1, \eta_1$	λ

GARCH(1, 1)

- 在 GARCH(1, 1) 中，λ_1 度量冲击（1 期 1 单位扰动）对当期波动率的影响

$$
\begin{aligned}
\text{Period 1} \quad &: \quad \lambda_1 \\
\text{Period 2} \quad &: \quad \lambda_1 \eta_1 \\
\vdots \quad & \quad\quad \vdots \\
\text{Period n} \quad &: \quad \lambda_1 \eta_1^{n-1}.
\end{aligned}
$$

GARCH 模型的似然函数

- 序列 x_t 的条件分布为

$$f\left(x_t \mid x_{t-1}, x_{t-2}, \cdots ; \theta\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_t^2}{2h_t}\right). \tag{2}$$

其中,$x_t = f\left(t, x_{t-1}, x_{t-2}, \cdots\right) + \varepsilon_t$. 在金融计量中,通常以 ε_t 表示金融资产的收益率,则 $x_t = \varepsilon_t$.

- GARCH 模型在当期 t 的对数似然函数为

$$
\begin{aligned}
\log L_t(\theta) &= \log f(x_t \mid x_{t-1}, x_{t-2}, \cdots ; \theta) \\
&= -\frac{1}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\log h_t - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_t^2}{h_t}
\end{aligned} \tag{3}
$$

其中,

$$
h_t = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \eta_i h_{t-i},
$$

$\theta = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_q, \eta_1, \cdots, \eta_p\}.$

GARCH 模型的估计

- GARCH(1, 1) 模型的对数似然函数计算步骤：

  (1) 初始化 ε_0, h_0。一种可行的选择是

  $$\varepsilon_0 = 0, \quad h_0 = \{x_t \text{ 的无条件方差}\}.$$

  (2) 计算序列扰动 ε_t, $t = 1, \cdots, T$。其中 T 代表全部样本长度。

  (3) 计算条件方差 $h_t = \lambda_0 + \lambda_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \eta_1 h_{t-1}, t = 1, \cdots, T$。

  (4) 计算 GARCH(1, 1) 模型在当期 t 的对数似然函数 $\log L_t(\theta)$, $t = 1, \cdots, T$。

  (5) 计算 GARCH(1, 1) 模型的对数似然函数，

  $$\log L(\theta) = \sum_{t=1}^{T} \log L_t(\theta).$$

GARCH 模型的估计

- θ 的极大似然估计如下

$$\hat{\theta} = \underset{\theta \in \Theta}{\operatorname{argmax}} \ \log L(\theta) . \tag{4}$$

- `rugarch::ugarchfit`
- 分布检验图示法：QQ 图（quantile to quantile）

分布检验：Jarque-Bera 检验

- Jarque-Bera 检验

$$H_0: e_t = \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{h_t}} \sim \mathcal{N}(0,1) \quad \text{vs} \quad H_1: e_t = \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{h_t}} \overset{not}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$$

$$JB = \frac{T}{6}\left(S^2 + \frac{1}{4}(K-3)^2\right) \xrightarrow{d} \chi^2(2)$$

其中

$$\begin{aligned} S &= \frac{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(e_t - \bar{e})^3}{\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(e_t - \bar{e})^2\right)^{3/2}}, \\ K &= \frac{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(e_t - \bar{e})^4}{\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(e_t - \bar{e})^2\right)^{2}}. \end{aligned}$$

基于 t 分布的 GARCH 模型

- 设定 $\varepsilon_t \sim St\,(0, h_t, \nu)$，其中 ν 表示 t 分布的自由度，x_t 的条件分布为

$$f\left(x_t \mid x_{t-1}, x_{t-2}, \cdots; \theta, \nu\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi h_t(\nu-2)}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{\varepsilon_t^2}{h_t(\nu-2)}\right)^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}, \tag{5}$$

其中 $\theta = \left\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_q, \eta_1, \cdots, \eta_p\right\}, \nu > 2, \Gamma(\cdot)$ 代表伽马函数。

基于 t 分布的 GARCH 模型

- 基于 t 分布的 GARCH 模型在当期 t 的对数似然函数为

$$
\begin{aligned}
\log L_t(\theta) &= \log f(x_t \mid x_{t-1}, x_{t-2}, \cdots; \theta) \\
&= -\frac{1}{2}\log(\pi(\nu-2)) - \frac{1}{2}\log h_t + \log\left(\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\right) - \log\left(\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right) \\
&\quad - \left(\frac{\nu+1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{\varepsilon_t^2}{h_t(\nu-2)}\right) \qquad (6)
\end{aligned}
$$

基于 GARCH 模型的预测

- 注意到在 GARCH(1, 1) 模型的设定中,$\varepsilon_t^2 = h_t e_t^2$,且 $\mathbb{E}\left(e_t^2\right) = 1$,则在 t 时期

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left(\varepsilon_t^2 \mid h_{t-1}, h_{t-2}, \ldots, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots\right) \\
= \; & \mathbb{E}\left(h_t \mid h_{t-1}, h_{t-2}, \ldots, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots\right) \\
= \; & \lambda_0 + \eta_1 h_{t-1} + \lambda_1 \varepsilon_{t-1}^2 \\
= \; & \hat{h}_t
\end{aligned}
$$

基于 GARCH 模型的预测

- 在 $t+1$ 时期

$$\begin{aligned}\hat{h}_{t+1} &= \lambda_0 + \eta_1 \hat{h}_t + \lambda_1 \mathbb{E}\left(\varepsilon_t^2 \mid h_{t-1}, h_{t-2}, \ldots, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots\right) \\ &= \lambda_0 + (\eta_1 + \lambda_1)\, \hat{h}_t\end{aligned}$$

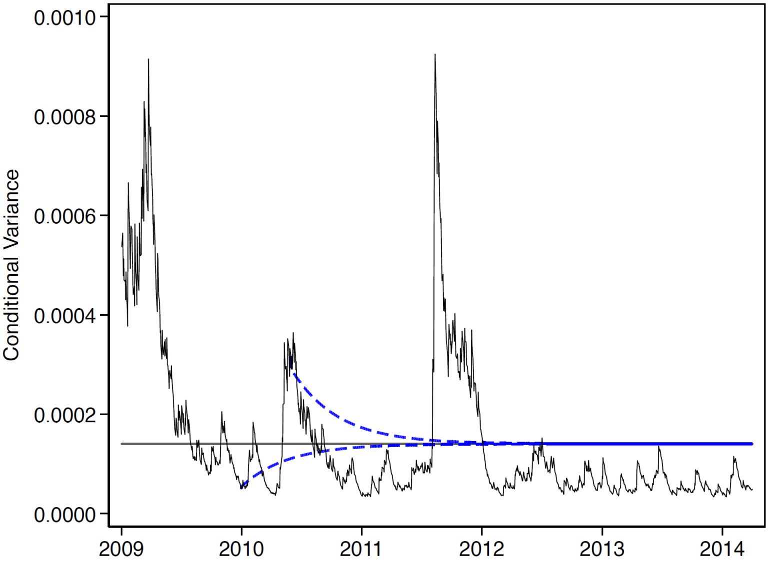
- $\forall k \geqslant 1$

$$\hat{h}_{t+k} = \lambda_0 + (\eta_1 + \lambda_1)\, \hat{h}_{t+k-1}$$

- 当 $k \to \infty$ 时

$$\lim_{k\to\infty} \hat{h}_{t+k} = \frac{\lambda_0}{1 - \eta_1 - \lambda_1}$$

GARCH(1, 1) 对 S&P 500 条件方差的预测



GARCH 的衍生模型: GARCH-M

- 证券市场线（SML）和资本市场线（CML）

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(r_i) &= r_f + \beta_i \left[\mathbb{E}(r_M) - r_f\right] \\
\mathbb{E}(r_i) &= r_f + \frac{\sigma_i}{\sigma_M} \left[\mathbb{E}(r_M) - r_f\right]
\end{aligned}
$$

- 风险溢价和期望收益率

$$
\begin{aligned}
\text{风险溢价} &= \text{风险的度量} \times \text{风险的价格} \\
\text{期望回报率} &= \text{资金的时间价值（无风险利率）} + \text{风险溢价}
\end{aligned}
$$

- GARCH-M

$$
\begin{aligned}
x_t &= f\left(t, x_{t-1}, x_{t-2}, \cdots\right) + \delta\sqrt{h_t} + \varepsilon_t \\
\varepsilon_t &= \sqrt{h_t} e_t, \quad e_t \overset{i.i.d.}{\sim} (0,1), \quad \mathbb{E}\left(e_t\right) = 0, \quad \mathbb{E}\left(e_t^2\right) = 1 \\
h_t &= \lambda_0 + \sum_{i=1}^{p} \eta_i h_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \varepsilon_{t-j}^2
\end{aligned}
$$

GARCH 的衍生模型：EGARCH

- 金融市场对信息反应的非对称性
  - $\varepsilon_t < 0$,往往伴随着杠杆率增加,波动率增加
  - $\varepsilon_t > 0$,波动率相对较低
- EGARCH

$$
\begin{aligned}
x_t &= f\left(t, x_{t-1}, x_{t-2}, \cdots\right) + \varepsilon_t \\
\varepsilon_t &= \sqrt{h_t} e_t, \quad e_t \overset{i.i.d.}{\sim} (0,1), \quad \mathbb{E}\left(e_t\right) = 0, \quad \mathbb{E}\left(e_t^2\right) = 1 \\
\ln h_t &= \lambda_0 + \sum_{i=1}^{p} \eta_i \ln h_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j g(e_{t-j}) \\
g(e_t) &= \theta e_t + \gamma\left(|e_t| - \mathbb{E}\left(|e_t|\right)\right)
\end{aligned}
$$

- 正负扰动的非对称性处理

$$h_t = \lambda_0 + \eta_1 h_{t-1} + \lambda_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \tilde{\lambda}_1 I_{t-1} \varepsilon_{t-1}^2$$

$$I_{t-1} = \begin{cases} 1 & : \quad \varepsilon_{t-1} \geq 0 \\ 0 & : \quad \varepsilon_{t-1} < 0 \end{cases}$$

GARCH 的衍生模型

Fig. 1. Select GARCH Acronyms.

- Bollerslev, Tim (2023): “The story of GARCH: A personal odyssey,” *Journal of Econometrics*, 234, 96-100.