时间序列分析（初级）

多元时间序列分析

陈堃翰

安徽大学 大数据与统计学院

本章结构

- ARIMAX
- 虚假回归
- 协整
- 误差修正模型
- 向量自回归模型和结构向量自回归模型

ARIMAX

- ARIMAX 模型结构

$$
\begin{cases}
y_t = \mu + \sum_{i=1}^{k} \frac{\Theta_i(B)}{\Phi_i(B)} B^{l_i} x_{it} + \varepsilon_t & (1) \\
\varepsilon_t = \frac{\Theta(B)}{\Phi(B)} a_t \quad \text{或者} \quad \varepsilon_t = \frac{\Theta(B)}{\Phi(B)} u_t & (2)
\end{cases}
$$

其中，a_t（或者 u_t）为零均值白噪声序列

互相关系数

- k 阶互相关函数

$$\mathrm{Cov} = \mathrm{Cov}\left(y_t, x_{t-k}\right) = \mathrm{E}\left[y_t - \mathrm{E}\left(y_t\right)\right]\left[x_{t-k} - \mathrm{E}\left(x_{t-k}\right)\right]$$

- k 阶互相关系数

$$C_{\rho_k} = \frac{\mathrm{Cov}\left(y_t, x_{t-k}\right)}{\sqrt{\mathrm{Var}\left(y_t\right)}\sqrt{\mathrm{Var}\left(x_{t-k}\right)}}$$

- $C_{\rho_k} \dot{\sim} N\left(0, \frac{1}{n-|k|}\right)$

虚假回归：以一元回归模型为例

- 考虑一元回归模型

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + e_t \quad e_t \overset{i.i.d.}{\sim} \left(0, \sigma_e^2\right)$$

- 假设 x_t 和 y_t 分别由如下相互独立的随机游走序列生成

$$\begin{aligned} x_t &= x_{t-1} + v_t \\ y_t &= y_{t-1} + w_t \end{aligned}$$

其中，$v_t \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}\left(0, \sigma_v^2\right)$，$\quad w_t \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}\left(0, \sigma_w^2\right)$；且 $\mathrm{Cov}\left(w_t, v_s\right) = 0, \forall t, s \in [0, T]$

- 原假设和备择假设

$$H_0 : \beta_1 = 0 \quad \leftrightarrow \quad H_1 : \beta_1 \neq 0$$

- OLS 的 t 统计量（自由度为样本容量）

$$t = \frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\beta_1}}, \quad \hat{\sigma}_{\beta_1} = \sqrt{\operatorname{Var}\left(\hat{\beta}_1\right)}$$

- 犯第一类错误（拒绝 H_0 ）的概率很高

单整的概念

- 如果序列 x_t 平稳,说明序列不存在单位根,这时称序列为零阶单整序列,简记为 $x_t \sim I(0)$
- 假如原序列一阶差分后平稳,说明序列存在一个单位根,这时称序列为一阶单整序列,简记为 $x_t \sim I(1)$
- 假如原序列至少需要进行 d 阶差分才能实现平稳,说明原序列存在 d 个单位根,这时称原序列为 d 阶单整序列,简记为 $x_t \sim I(d)$

协整的概念

- 假定自变量序列为 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k$, 其中, $\boldsymbol{x}_i = \{x_{it}\}$
- 响应变量序列为 $\{y_t\}$ 构造回归模型

$$y_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_{it} + \varepsilon_t$$

- 假定回归残差序列 $\{\varepsilon_t\}$ 平稳, 称响应序列 $\{y_t\}$ 与自变量序列 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ 之间具有协整关系

协整的概念

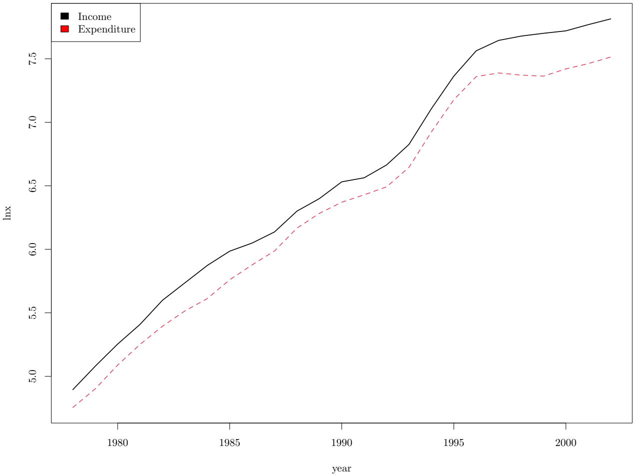

Figure : 中国农村居民家庭人均纯收入与生活消费支出

协整检验

- 假设条件
  - 原假设:多元非平稳序列之间不存在协整关系

$$H_0 : \varepsilon_t \sim I(k), k \geq 1$$

  - 备择假设:多元非平稳序列之间存在协整关系

$$H_1 : \varepsilon_t \sim I(0)$$

- 检验步骤
  - 建立响应序列与输入序列之间的回归模型
  - 对回归残差序列进行平稳性检验
- 案例:中国农村居民家庭人均纯收入与消费支出

误差修正模型

- 误差修正模型 (Error Correction Model)，简记为 ECM，用以刻画时间序列的短期影响因素
- 响应序列的当期波动 Δy_t 主要会受到三方面短期波动的影响

$$
\begin{aligned}
y_t - y_{t-1} &= \beta x_t - \beta x_{t-1} - \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
\nabla y_t &= \beta \nabla x_t - \mathrm{ECM}_{t-1} + \varepsilon_t
\end{aligned}
$$

  - 输入序列的当期波动 Δy_t
  - 上一期的误差 ECM_{t-1}
  - 纯随机波动 ε_t
- 误差修正模型

联立线性方程组

案例 1: 供需均衡

$$Q_t^d = \beta_0 + \beta_1 P_t + \varepsilon_t^d,\ \beta_1 < 0$$
$$Q_t^s = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 R_t + \varepsilon_t^s,\ \alpha_1 > 0$$
$$Q_t^d = Q_t^s \quad (= Q_t)$$

案例 2: 国名经济核算

$$C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \varepsilon_t^C$$
$$I_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \alpha_2 Y_{t-1} + \varepsilon_t^I$$
$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$

- 统计学或者计量经济学的问题
    - 内生性的问题
    - 系统识别性的问题
    - 量测误差相关性问题
    - 经济系统的动态性问题

内生性的问题

- 考虑供给方程和需求方程的联立方程组

$$
\begin{aligned}
Q_t^d &= \beta_0 + \beta_1 P_t + \varepsilon_t^d, \quad \beta_1 < 0 \\
Q_t^s &= \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 R_t + \varepsilon_t^s, \quad \alpha_1 > 0 \\
Q_t^d &= Q_t^s \quad (= Q_t)
\end{aligned}
$$

- OLS

$$Q_t = \delta_0 + \delta_1 P_t + u_t$$

- OLS 估计量 $\hat{\delta}_1$ 不能收敛到 β_1 或者 α_1. 特别的，当 $\beta_0 = \alpha_0 = \alpha_2 = 0$ 时，

$$\hat{\delta}_1 \xrightarrow{p} \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma_d^2}\beta_1 + \frac{\sigma_d^2}{\sigma_s^2 + \sigma_d^2}\alpha_1.$$

系统识别性的问题

- 仍然考虑供给方程和需求方程的联立方程组

$$
\begin{aligned}
Q_t^d &= \beta_0 + \beta_1 P_t + \varepsilon_t^d, \quad \beta_1 < 0 \\
Q_t^s &= \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 R_t + \varepsilon_t^s, \quad \alpha_1 > 0 \\
Q_t^d &= Q_t^s \quad (= Q_t)
\end{aligned}
$$

- 假设 $\mathrm{Cov}\left(\varepsilon_t^d, \varepsilon_t^s\right) \neq 0, \alpha_2 \neq 0, \mathrm{Cov}\left(R_t, \varepsilon_t^d\right) = 0$，则

$$
\hat{\beta}_1^{IV} = \frac{\sum_{t=1}^{T}\left(R_t - \bar{R}\right)\left(Q_t - \bar{Q}\right)}{\sum_{t=1}^{T}\left(R_t - \bar{R}\right)\left(P_t - \bar{P}\right)}
$$

但是 α_1 无法以 R_t 作为工具变量进行估计

- 1 个外生变量（R_t），2 内生变量（P_t, Q_t）

向量自回归模型

- 将系统变量内生化

$$
\begin{aligned}
C_t &= \beta_0 + \beta_1 Y_t + \varepsilon_t^C \\
I_t &= \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \alpha_2 Y_{t-1} + \varepsilon_t^I \\
Y_t &= C_t + I_t + G_t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\beta_1 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha_1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} C_t \\ I_t \\ Y_t \\ G_t \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \alpha_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
[Y_{t-1}]
+
\begin{bmatrix} \varepsilon_t^C \\ \varepsilon_t^I \\ 0 \\ \varepsilon_t^G \end{bmatrix}
$$

- 引入内生变量的动态特征

$$
\begin{bmatrix} C_t \\ I_t \\ Y_t \\ G_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\beta_0(1-\alpha_1)+\alpha_0\beta_1}{1-\alpha_1-\beta_1} \\ \frac{\beta_1(1-\alpha_0)+\alpha_1\beta_0}{1-\alpha_1-\beta_1} \\ \frac{\beta_0+\alpha_0}{1-\alpha_1-\beta_1} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\beta_1\alpha_2}{1-\alpha_1-\beta_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_2(1-\beta_1)}{1-\alpha_1-\beta_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_2}{1-\alpha_1-\beta_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{t-1} \\ I_{t-1} \\ Y_{t-1} \\ G_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{(1-\alpha_1)\varepsilon_t^C+\beta_1\left(\varepsilon_t^I+\varepsilon_t^G\right)}{1-\alpha_1-\beta_1} \\ \frac{(1-\beta_1)\varepsilon_t^I+\alpha_1\left(\varepsilon_t^C+\varepsilon_t^G\right)}{1-\alpha_1-\beta_1} \\ \frac{\varepsilon_t^C+\varepsilon_t^I+\varepsilon_t^G}{1-\alpha_1-\beta_1} \\ \varepsilon_t^G \end{bmatrix}
$$

向量自回归模型

- 时间序列向量

$$\mathbf{Y}_t = \begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \\ \vdots \\ Y_{nt} \end{bmatrix}$$

- 向量自回归模型（Vector Autoregression, VAR）

$$\mathbf{Y}_t = \sum_{j=1}^{p} \mathbf{\Phi}_j \mathbf{Y}_{t-j} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \tag{1}$$

$$\mathbb{E}\left[\boldsymbol{\varepsilon}_t\right] = 0, \quad \mathbb{E}\left[\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_s^\top\right] = \begin{cases} \mathbf{\Omega} & \text{if} \quad t = s \\ \mathbf{0} & \text{if} \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

其中 $\mathbf{\Phi}_j$ is $n \times n$ 矩阵，并且 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 时 $n \times 1$ 向量，通常也被记为VAR(p)

向量自回归模型

- 一元 AR(1) 模型

$$\begin{aligned} Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad & \text{平稳如果 } |\beta_1| < 1 \\ \beta_1 = 1 \quad & \text{随机游走 (Random Walk)} \end{aligned}$$

- 一元 AR(p) 模型

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 Y_{t-2} + \ldots + \beta_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$
$$(1 - \lambda_1 B)(1 - \lambda_2 B)\ldots\left(1 - \lambda_p B\right) Y_t = \beta_0 + \varepsilon_t$$

$$\begin{aligned} \text{平稳} \qquad & |\lambda_i| < 1, i = 1, 2, \ldots, p \\ \text{存在单位根} \quad & \exists\, \lambda_i = 1,\ \beta_1 + \ldots + \beta_p = 1 \end{aligned}$$

VAR ?

向量自回归模型

- 考虑二元 VAR(1) 模型

$$
\begin{aligned}
Y_t &= \phi_{11} Y_{t-1} + \phi_{12} X_{t-1} + \varepsilon_{y,t} \\
X_t &= \phi_{21} Y_{t-1} + \phi_{22} X_{t-1} + \varepsilon_{x,t}
\end{aligned}
$$

Y_t 和 X_t 的动态过程是什么样的？

向量自回归模型

- 考虑二元 VAR(1) 模型

$$
\begin{aligned}
Y_t &= \phi_{11} Y_{t-1} + \phi_{12} X_{t-1} + \varepsilon_{y,t} \\
X_t &= \phi_{21} Y_{t-1} + \phi_{22} X_{t-1} + \varepsilon_{x,t}
\end{aligned}
$$

  Y_t 和 X_t 的动态过程是什么样的?

- 重新表示 VAR(1)

$$
\begin{aligned}
(1 - \phi_{11} B)\, Y_t - \phi_{12} B X_t &= \varepsilon_{y,t} \\
-\phi_{21} B Y_t + (1 - \phi_{22} B)\, X_t &= \varepsilon_{x,t}
\end{aligned}
$$

向量自回归模型

- 在第一个方程两边同时乘以 $(1-\phi_{22}B)$，在第二个方程两边同时乘以 $\phi_{12}B$

$$
\begin{aligned}
(1-\phi_{22}B)(1-\phi_{11}B)Y_t-(1-\phi_{22}B)\phi_{12}BX_t &= (1-\phi_{22}B)\varepsilon_{y,t} \\
-\phi_{12}B\phi_{21}BY_t+(1-\phi_{22}B)\phi_{12}BX_t &= \phi_{12}B\varepsilon_{x,t}
\end{aligned}
$$

将第一个方程与第二个方程相加消去 X_t

$$
(1-\phi_{22}B)(1-\phi_{11}B)Y_t-\phi_{12}\phi_{21}B^2Y_t=(1-\phi_{22}B)\varepsilon_{y,t}+\phi_{12}B\varepsilon_{x,t}
$$

- 整理有

$$
\left[1-(\phi_{11}+\phi_{22})B+(\phi_{11}\phi_{22}-\phi_{12}\phi_{21})B^2\right]Y_t=(1-\phi_{22}B)\varepsilon_{y,t}+\phi_{12}B\varepsilon_{x,t}
$$

Y_t 是 ARMA(2, 1)

向量自回归模型

- 如果 $|\lambda_1| < 1$ 且 $|\lambda_2| < 1$, Y_t 平稳

$$\left[1 - (\phi_{11} + \phi_{22}) B + (\phi_{11}\phi_{22} - \phi_{12}\phi_{21}) B^2\right] Y_t = (1 - \phi_{22}B) \varepsilon_{y,t} + \phi_{12}B\varepsilon_{x,t}$$

$$(1 - \lambda_1 B) (1 - \lambda_2 B) Y_t = (1 - \phi_{22}B) \varepsilon_{y,t} + \phi_{12}B\varepsilon_{x,t}$$

- 类似的,

$$\left[1 - (\phi_{11} + \phi_{22}) B + (\phi_{11}\phi_{22} - \phi_{12}\phi_{21}) B^2\right] X_t = (1 - \phi_{11}B) \varepsilon_{x,t} + \phi_{21}B\varepsilon_{y,t}$$

$$(1 - \lambda_1 B) (1 - \lambda_2 B) X_t = (1 - \phi_{11}B) \varepsilon_{x,t} + \phi_{21}B\varepsilon_{y,t}$$

如果 $|\lambda_1| < 1$ 且 $|\lambda_2| < 1$, X_t 平稳

假设

$$\begin{bmatrix} Y_t \\ X_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.1 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{t-1} \\ X_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{y,t} \\ \varepsilon_{x,t} \end{bmatrix}$$

假设

$$\begin{bmatrix} Y_t \\ X_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.1 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{t-1} \\ X_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{y,t} \\ \varepsilon_{x,t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \left[1 - 1.4B + 0.45B^2\right] Y_t &= (1 - 0.6B)\varepsilon_{y,t} + 0.3B\varepsilon_{x,t} \\ \left[1 - 1.4B + 0.45B^2\right] X_t &= (1 - 0.8B)\varepsilon_{x,t} + 0.1B\varepsilon_{y,t} \end{aligned}$$

$$\left[1 - 1.4B + 0.45B^2\right] = (1 - 0.9B)(1 - 0.5B)$$

假设

$$\begin{bmatrix} Y_t \\ X_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.25 & 0.85 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{t-1} \\ X_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{y,t} \\ \varepsilon_{x,t} \end{bmatrix}$$

假设

$$\begin{bmatrix} Y_t \\ X_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.25 & 0.85 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{t-1} \\ X_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{y,t} \\ \varepsilon_{x,t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \left[1 - 1.35B + 0.35B^2\right] Y_t &= (1 - 0.85B)\varepsilon_{y,t} + 0.3B\varepsilon_{x,t} \\ \left[1 - 1.35B + 0.35B^2\right] X_t &= (1 - 0.5B)\varepsilon_{x,t} + 0.25B\varepsilon_{y,t} \end{aligned}$$

$$1 - 1.35B + 0.35B^2 = (1 - 0.25B)(1 - B)$$

$$\begin{aligned} (1 - 0.35B)(1 - B)Y_t &= (1 - 0.85B)\varepsilon_{y,t} + 0.3B\varepsilon_{x,t} \\ (1 - 0.35B)(1 - B)X_t &= (1 - 0.5B)\varepsilon_{x,t} + 0.35B\varepsilon_{y,t} \end{aligned}$$

向量自回归模型

AR(1) :

$$
\begin{aligned}
Y_{t+k} &= \beta_0 + \beta_1 Y_{t+k-1} + \varepsilon_{t+k} \\
&= \beta_0 + \beta_0\beta_1 + \beta_1^2 Y_{t+k-2} + \varepsilon_{t+k} + \beta_1\varepsilon_{t+k-1} \\
&\dots \\
&= \beta_0 + \beta_0\beta_1 + \ldots + \beta_0\beta_1^k + \beta_1^{k+1} Y_{t-1} + \varepsilon_{t+k} + \beta_1\varepsilon_{t+k-1} + \ldots \beta_1^k \varepsilon_t
\end{aligned}
$$

- $\partial Y_{t+k}/\partial \varepsilon_t = \beta_1^k$
- 如果 $|\beta_1| < 1, \partial Y_{t+k}/\partial \varepsilon_t \to 0$
- 如果 $\beta_1 = 1, \partial Y_{t+k}/\partial \varepsilon_t \nrightarrow 0$

向量自回归模型

VAR(1):

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Y}_{t+k} &= \mathbf{\Phi}_1 \mathbf{Y}_{t+k-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{t+k} \\
&= \mathbf{\Phi}_1^2 \mathbf{Y}_{t+k-2} + \boldsymbol{\varepsilon}_{t+k} + \mathbf{\Phi}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_{t+k-1} \\
&\ldots \\
&= \mathbf{\Phi}_1^{k+1} \mathbf{Y}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{t+k} + \mathbf{\Phi}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_{t+k-1} + {\mathbf{\Phi}_1}^2 \boldsymbol{\varepsilon}_{t+k-1} + \ldots + \mathbf{\Phi}_1^k \boldsymbol{\varepsilon}_t
\end{aligned}
$$

- 如果 $\mathbf{\Phi}_1^k \to \mathbf{0}$,冲击的影响是短期的
- 如果 $\mathbf{\Phi}_1$ 的特征根的绝对值均小于 1, $\mathbf{\Phi}_1^k \to \mathbf{0}$

$$\begin{vmatrix} \phi_{11}-\lambda & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\phi_{11}-\lambda)(\phi_{22}-\lambda) - \phi_{12}\phi_{21} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{(\phi_{11}\phi_{22} - \phi_{12}\phi_{21}) - (\phi_{11}+\phi_{22})\lambda + \lambda^2 = 0}$$

VAR(1) 的 ARMA(2, 1) 表示形式

$$\left[1 - (\phi_{11}+\phi_{22})B + (\phi_{11}\phi_{22} - \phi_{12}\phi_{21})B^2\right] Y_t = (1 - \phi_{22}B)\varepsilon_{y,t} + \phi_{12}B\varepsilon_{x,t}$$

$$(1-\lambda_1 B)(1-\lambda_2 B) Y_t = (1 - \phi_{22}B)\varepsilon_{y,t} + \phi_{12}B\varepsilon_{x,t}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - (\phi_{11}+\phi_{22})x + (\phi_{11}\phi_{22} - \phi_{12}\phi_{21})x^2 \\ &= (1-\lambda_1 x)(1-\lambda_2 x) \end{aligned}$$

$$f(1/\lambda_i) = 0 \Rightarrow 1 - (\phi_{11}+\phi_{22})\frac{1}{\lambda_i} + (\phi_{11}\phi_{22} - \phi_{12}\phi_{21})\frac{1}{\lambda_i^2} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_i^2 - (\phi_{11}+\phi_{22})\lambda_i + (\phi_{11}\phi_{22} - \phi_{12}\phi_{21}) = 0}$$

向量自回归模型

- VAR(p) 可以等价地写成 VAR(1)

$$
\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_t \\ \mathbf{Y}_{t-1} \\ \mathbf{Y}_{t-2} \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_{t-p+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_1 & \mathbf{\Phi}_2 & \mathbf{\Phi}_3 & \cdots & \mathbf{\Phi}_{p-1} & \mathbf{\Phi}_p \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{t-1} \\ \mathbf{Y}_{t-2} \\ \mathbf{Y}_{t-3} \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_{t-p} \end{bmatrix}
$$

$$
\xi_t = \mathbf{F}\xi_{t-1} + \mathbf{v}_t
$$

其中,

$$
\mathbb{E}[\mathbf{v}_t] = 0, \quad \mathbb{E}\left[\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_s^\top\right] = \begin{cases} \mathbf{Q} & \text{if} \quad t = s \\ \mathbf{0} & \text{if} \quad \text{otherwise} \end{cases}
$$