时间序列分析（初级）

平稳时间序列分析

陈堃翰

安徽大学 大数据与统计学院

本章结构

- 方法性工具
  - 延迟算子
  - 差分运算
  - 线性差分方程
- ARMA 模型
- 单位根检验
- 平稳序列建模

方法性工具

延迟算子

- 延迟算子（Lag operator）类似于一个时间指针，当前序列值乘以一个延迟算子，就相当于把当前序列值的时间向过去拨了一个时刻

延迟算子

- 延迟算子(Lag operator)类似于一个时间指针,当前序列值乘以一个延迟算子,就相当于把当前序列值的时间向过去拨了一个时刻
- 记 B 为延迟算子,有

$$x_{t-p} = B^p x_t, \forall p \geq 1 \tag{1}$$

延迟算子的性质

- $B^0 = 1$

延迟算子的性质

- $B^0 = 1$
- $B(c \cdot x_t) = c \cdot B(x_t) = c \cdot x_{t-1}$, c为任意常数

延迟算子的性质

- $B^0 = 1$
- $B(c \cdot x_t) = c \cdot B(x_t) = c \cdot x_{t-1}$, c为任意常数
- $B(x_t \pm y_t) = x_{t-1} \pm y_{t-1}$

延迟算子的性质

- $B^0 = 1$
- $B(c \cdot x_t) = c \cdot B(x_t) = c \cdot x_{t-1}$, c为任意常数
- $B(x_t \pm y_t) = x_{t-1} \pm y_{t-1}$
- $B^n x_t = x_{t-n}$

延迟算子的性质

- $B^0 = 1$
- $B(c \cdot x_t) = c \cdot B(x_t) = c \cdot x_{t-1}$, c为任意常数
- $B(x_t \pm y_t) = x_{t-1} \pm y_{t-1}$
- $B^n x_t = x_{t-n}$
- $(1-B)^n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i B^i$, 其中 $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$

延迟算子的性质

- $B^0 = 1$
- $B\left(c \cdot x_t\right) = c \cdot B\left(x_t\right) = c \cdot x_{t-1}$, c为任意常数
- $B\left(x_t \pm y_t\right) = x_{t-1} \pm y_{t-1}$
- $B^n x_t = x_{t-n}$
- $(1-B)^n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i B^i$, 其中 $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$
- $\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots \phi_p B^p$

Green 函数

- 原理

$$\begin{cases} \Phi(B)\, x_t = \varepsilon_t \\ \qquad\quad x_t = \Psi(B)\, \varepsilon_t \end{cases} \Rightarrow \Phi(B)\,\Psi(B)\,\varepsilon_t = \varepsilon_t$$

- 方法
  - 待定系数法

- 递推公式

$$\begin{cases} \psi_0 = 1 \\ \psi_i = \sum_{j=1}^{i} \psi_{i-j}\phi'_j \quad i \geqslant 1 \end{cases} \tag{2}$$

其中，

$$\phi'_j = \begin{cases} \phi_j & , \quad j \leqslant p \\ 0 & , \quad j > p \end{cases}$$

- $\{\psi_j\}$ 称为 Green 函数。

用延迟算子表示差分运算

- 1 阶差分

$$\nabla x_t = x_t - x_{t-1} \tag{3}$$

1 阶差分也记作 Δx_t.

用延迟算子表示差分运算

- 1 阶差分

$$\nabla x_t = x_t - x_{t-1} \tag{3}$$

  1 阶差分也记作 Δx_t.

- p 阶差分

$$\nabla^p x_t = (1-B)^p x_t = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i C_p^i x_{t-i}. \tag{4}$$

用延迟算子表示差分运算

- 1 阶差分

$$\nabla x_t = x_t - x_{t-1} \tag{3}$$

1 阶差分也记作 Δx_t.

- p 阶差分

$$\nabla^p x_t = (1-B)^p x_t = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i C_p^i x_{t-i}. \tag{4}$$

- k 步差分

$$\nabla_k = x_t - x_{t-k} = \left(1 - B^k\right) x_t. \tag{5}$$

线性差分方程

线性差分方程

- 线性差分方程

$$z_t + a_1 z_{t-1} + a_2 z_{t-2} + \cdots + a_p z_{t-p} = h(t). \tag{6}$$

线性差分方程

- 线性差分方程

$$z_t + a_1 z_{t-1} + a_2 z_{t-2} + \cdots + a_p z_{t-p} = h(t). \tag{6}$$

- 齐次线性差分方程

$$z_t + a_1 z_{t-1} + a_2 z_{t-2} + \cdots + a_p z_{t-p} = 0. \tag{7}$$

齐次线性差分方程的解

齐次线性方程的特征方程

$$\lambda^p + a_1\lambda^{p-1} + a_2\lambda^{p-2} + \cdots + a_p = 0. \tag{8}$$

特征方程的解称为**特征根**，记为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$.

齐次线性差分方程的解

齐次线性方程的特征方程

$$\lambda^p + a_1\lambda^{p-1} + a_2\lambda^{p-2} + \cdots + a_p = 0. \tag{8}$$

特征方程的解称为**特征根**,记为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$.

Case 1. $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ 为 p 个不同的实数

$$z_t = c_1\lambda_1^t + c_2\lambda_2^t + \cdots + c_p\lambda_p^t. \tag{9}$$

Case 2. $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ 有相同实数根

$$z_t = \left(c_1 + c_2 t + \cdots + c_d t^{d-1}\right) \lambda_1^t + c_{d+1} \lambda_{d+1}^t + \cdots + c_p \lambda_p^t. \tag{10}$$

其中，$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_d$ 为相同实数根，$\lambda_{d+1}, \lambda_{d+2}, \cdots, \lambda_p$ 为互不相同的实数根。

Case 2. $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ 有相同实数根

$$z_t = \left(c_1 + c_2 t + \cdots + c_d t^{d-1}\right) \lambda_1^t + c_{d+1}\lambda_{d+1}^t + \cdots + c_p \lambda_p^t. \tag{10}$$

其中,$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_d$ 为相同实数根,$\lambda_{d+1}, \lambda_{d+2}, \cdots, \lambda_p$ 为互不相同的实数根。

Case 3. $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ 有复数根

$$z_t = \sum_{j=1}^{d} \left(c_1 + c_2 t + \cdots + c_d t^{d-1}\right) \lambda_1^t + \sum_{j=d+1}^{p-2m} c_j \boxed{\lambda_j^t} + \sum_{j=1}^{m} \boxed{r_j^t} \left(c_{1j} e^{it\omega_j} + c_{2j} e^{-it\omega_j}\right). \tag{11}$$

其中,$\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_d$ 为相同实数根,$r_1 e^{i\omega_1}, r_1 e^{-i\omega_1}, \cdots, r_m e^{i\omega_m}, r_m e^{-i\omega_m}$ 为 m 对共轭复数根,$\lambda_{d+1}, \cdots, \lambda_{p-2m}$ 为不同实数根。

非齐次线性方程的解

非齐次线性方程的解

- 非齐次线性方程的的特解
  - 使得非齐次线性差分方程成立的任意解

$$z_t'' + a_1 z_{t-1}'' + a_2 z_{t-2}'' + \cdots + a_p z_{t-p}'' = h(t).$$

非齐次线性方程的解

- 非齐次线性方程的的特解
  - 使得非齐次线性差分方程成立的任意解

$$z_t'' + a_1 z_{t-1}'' + a_2 z_{t-2}'' + \cdots + a_p z_{t-p}'' = h(t).$$

- 非齐次线性方程的通解
  - 齐次线性差分方程的通解和非齐次线性差分方程的特解之和

$$z_t = z_t' + z_t''.$$

ARMA 模型

Wold 分解定理

- 对于任何一个离散平稳过程 $\{x_t\}$ 它都可以分解为两个不相关的平稳序列之和,其中一个为确定性的,另一个为随机性的,

$$x_t = V_t + \xi_t \tag{12}$$

- V_t 为确定性序列,历史序列值的线性组合

$$V_t = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j x_{t-j}$$

- ξ_t 为随机序列,表示不能由历史信息解读的部分

$$\xi_t = \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j \varepsilon_{t-j}$$

AR 模型的的定义

- 具有如下结构的模型称为 p 阶自回归模型, AR(p)

$$
\begin{cases}
x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t & (13) \\
\phi_p \neq 0 & (14) \\
\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0, \quad \mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2, \quad \mathbb{E}(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0, \quad s \neq t & (15) \\
\mathbb{E}(x_s \varepsilon_t) = 0, \quad \forall s < t & (16)
\end{cases}
$$

- 引进延迟算子后，AR(p)可简记为

$$\Phi(B) x_t = \phi_0 + \varepsilon_t. \tag{17}$$

其中，

$$\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p.$$

AR 模型的定义

- 对 (17) 两边同时取期望（**为什么可以**），

$$
\begin{aligned}
\Phi(B)\underbrace{\mathbb{E}(x_t)}_{:=\mu} &= \phi_0 \\
&\Downarrow \\
\left(1-\phi_1-\phi_2-\cdots-\phi_p\right)\mu &= \phi_0
\end{aligned}
$$

AR 模型的定义

- 称 $\{y_t\}$ 为 $\{x_t\}$ 的去中心化序列, 令

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\phi_0}{1-\phi_1-\cdots-\phi_p}, \\ y_t &= x_t-\mu. \end{aligned}$$

- 去中心化序列的 AR(p) 模型可以表示为

$$\Phi\left(B\right)y_t=\varepsilon_t. \tag{18}$$

AR 模型平稳性判别

- 为什么要判别

AR 模型平稳性判别

- 为什么要判别
  - AR 模型是常用的平稳序列模型之一,但是并非所有的 AR 模型都是平稳的
- 判别方法

AR 模型平稳性判别

- 为什么要判别
  - AR 模型是常用的平稳序列模型之一,但是并非所有的 AR 模型都是平稳的
- 判别方法
  - 单位根判别法
  - 平稳域判别法

AR 模型平稳性判别

- 为什么要判别
  - AR 模型是常用的平稳序列模型之一，但是并非所有的 AR 模型都是平稳的
- 判别方法
  - 单位根判别法
  - 平稳域判别法
- 考察如下四个 AR 序列（例 3.1）

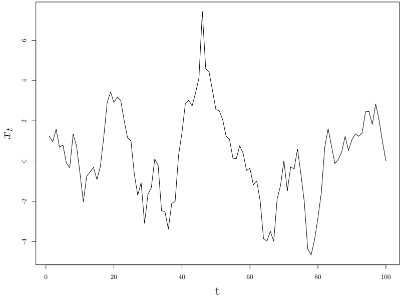
(1) $x_t = 0.8x_{t-1} + \varepsilon_t$

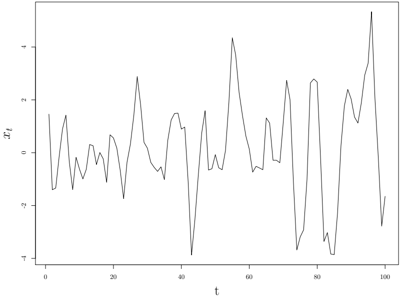
(2) $x_t = -1.1x_{t-1} + \varepsilon_t$

(3) $x_t = x_{t-1} - 0.5x_{t-2} + \varepsilon_t$

(4) $x_t = x_{t-1} + 0.5x_{t-1} + \varepsilon_t$

平稳 AR 序列

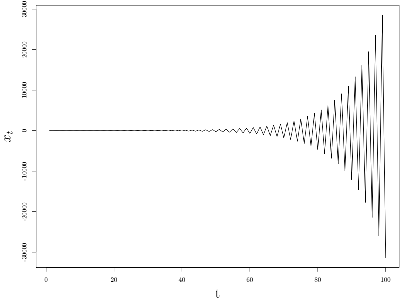


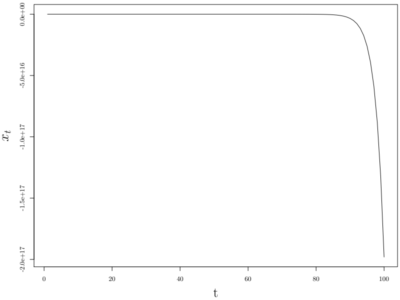


(1) $x_t = 0.8x_{t-1} + \varepsilon_t$

(3) $x_t = x_{t-1} - 0.5x_{t-2} + \varepsilon_t$

非平稳 AR 序列





(2) $x_t = -1.1x_{t-1} + \varepsilon_t$

(4) $x_t = 1.5x_{t-1} + \varepsilon_t$

AR 模型平稳性判别方法

- 特征根判别
  - AR(p) 模型平稳的充要条件是 p 个特征根在单位圆内
  - AR(p) 模型平稳的等价条件是 p 个自回归多项式的根在单位圆外
- 平稳域判别
  - 平稳域

$$\left\{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_p \mid \text{单位根都在单位圆内}\right\} \tag{19}$$

AR(1) 模型平稳条件

- 特征根

$$\lambda = \phi$$

- 平稳域

$$|\phi| < 1$$

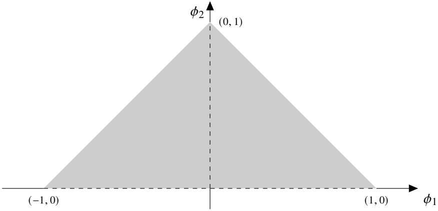
AR(2) 模型平稳条件

- 特征根

$$\lambda_1 = \frac{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2}$$

- 平稳域



$$\left\{\phi_1, \phi_2 \mid |\phi_2| < 1, \text{ 且 } \phi_2 \pm \phi_1 < 1\right\}$$

例 3.1 平稳性判别

模型	特征根判别	平稳域判别	结论
(1)	$\lambda_1 = 0.8$	$\phi_1 = 0.8$	平稳
(2)	$\lambda_1 = -1.1$	$\phi_1 = -1.1$	非平稳
(3)	$\lambda_1 = \frac{1+i}{2} \quad \lambda_2 = \frac{1-i}{2}$	$\lvert\phi_2\rvert = 0.5, \phi_2 + \phi_1 = 0.5, \phi_2 - \phi_1 = -1.5$	平稳
(4)	$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$	$\lvert\phi_2\rvert = 0.5, \phi_2 + \phi_1 = 1.5, \phi_2 - \phi_1 = -0.5$	非平稳

AR 模型的统计性质

- 均值
- 方差
- 协方差
- 自相关系数
- 偏自相关系数

均值

- 如果 AR(p) 满足平稳性条件，

$$\mathbb{E}\left(x_t\right) = \mathbb{E}\left(\phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t\right)$$

- 注意到，

$$\mathbb{E}\left(x_t\right) = \mu, \quad \mathbb{E}\left(\varepsilon_t\right) = 0, \quad \forall t$$

所以，

$$\mu = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1 - \cdots - \phi_0}$$

方差

- 注意到

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$$

且 $\{\varepsilon_t\}$ i.i.d.，有

$$\operatorname{Var}(x_t) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 \sigma_\varepsilon^2 \tag{20}$$

自协方差函数

- 假设 x_t 为中心化序列，并且 AR(p) 为平稳序列，$\forall k > 1$，两边同时乘以 x_{t-k} 再求期望，

$$\mathbb{E}\left(x_t x_{t-k}\right) = \phi_1 \mathbb{E}\left(x_{t-1} x_{t-k}\right) + \cdots + \phi_p \mathbb{E}\left(x_{t-p} x_{t-k}\right) + \mathbb{E}\left(\varepsilon_t x_{t-k}\right). \tag{21}$$

- 注意到 $\mathbb{E}\left(\varepsilon_t x_{t-k}\right) = 0$，则自协方差函数的递推公式为

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \cdots + \phi_p \gamma_{k-p}. \tag{22}$$

自相关系数

- 自相关系数(ACF)的定义

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}. \tag{23}$$

- AR(p) 自相关系数的递推公式

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \cdots + \phi_p \rho_{k-p}. \tag{24}$$

自相关系数

- 自相关系数的性质
  - 拖尾性

$$\rho(k)=\sum_{i=1}^{p} c_i\lambda_i^k \quad c_1, c_2, \cdots, c_p \text{ 不能恒等于零 }.$$

  - 呈复指数衰减（**为什么？**）

$$\rho(k)=\sum_{i=1}^{p} c_i\lambda_i^k \to 0.$$

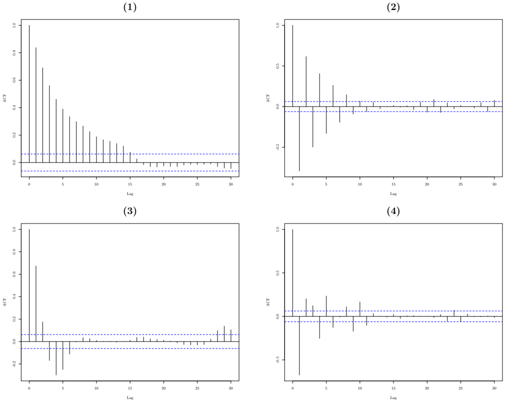
考察如下 AR 模型的自相关系数

(1) $x_t = 0.8x_{t-1} + \varepsilon_t$

(2) $x_t = -0.8x_{t-1} + \varepsilon_t$

(3) $x_t = x_{t-1} - 0.5x_{t-2} + \varepsilon_t$

(4) $x_t = -x_{t-1} - 0.5x_{t-2} + \varepsilon_t$



偏自相关系数

- 假设 $\{x_t\}$ 为中心化 AR(p) 平稳序列, k 偏自相关系数定义为

$$\rho_{x_t,x_{t-k}|x_{t-1},\cdots,x_{t-k+1}} = \frac{\mathbb{E}\left\{\left[x_t - \hat{\mathbb{E}}(x_t)\right]\left[x_{t-k} - \hat{\mathbb{E}}(x_{t-k})\right]\right\}}{\mathbb{E}\left\{\left[x_{t-k} - \hat{\mathbb{E}}(x_{t-k})\right]^2\right\}}, \quad (25)$$

其中,

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbb{E}}\left(x_t\right) &= \mathbb{E}\left[x_t \mid x_{t-1}, \cdots, x_{t-k+1}\right] \\
\hat{\mathbb{E}}\left(x_{t-k}\right) &= \mathbb{E}\left[x_{t-k} \mid x_{t-1}, \cdots, x_{t-k+1}\right]
\end{aligned}$$

- k 偏自相关系数可以由如下回归方程的 OLS 估计, $\hat{\phi}_{kk}$ 得到,

$$x_t = \phi_{k1} x_{t-1} + \phi_{k2} x_{t-2} + \cdots + \phi_{kk} x_{t-k} + \varepsilon_t.$$

- 平稳 AR(p) 模型偏自相关系数 p 阶截尾

Yule-Walker 方程

- 在 $x_t = \phi_{k1}x_{t-1} + \phi_{k2}x_{t-2} + \cdots + \phi_{kk}x_{t-k} + \varepsilon_t$ 两边同时乘以 x_{t-l} 并求期望有

$$\rho_l = \phi_{k1}\rho_{l-1} + \phi_{k2}\rho_{l-2} + \cdots + \phi_{kk}\rho_{l-k}$$

- 依次取 $l = 1, \cdots, k$，有

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{k1} \\ \phi_{k2} \\ \vdots \\ \phi_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_k \end{pmatrix}$$

Yule-Walker 方程

- 根据 Cramer 法则，$\phi_{kk} = \frac{D_k}{D}$，$D_k$ 是 D 中的第 k 个向量换成 $(\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_k)^\top$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & 1 \end{vmatrix} \quad D_k = \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \boxed{\rho_1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \boxed{\rho_2} \\ \vdots & \vdots & & \boxed{\vdots} \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & \boxed{\rho_k} \end{vmatrix}$$

Yule-Walker 方程

- 对于 AR(p) 模型,有如下 Yule-Walker 方程

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \boxed{\begin{matrix}\rho_{p-1} \\ \rho_{p-2} \\ \vdots \\ \rho_{k-p}\end{matrix}} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_k \end{pmatrix}$$

- 当 $k > p$ 时

$$D_k = \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{p-1} & \cdots & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{p-2} & \cdots & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & \rho_{k-p} & \cdots & \rho_k \end{vmatrix} = 0$$

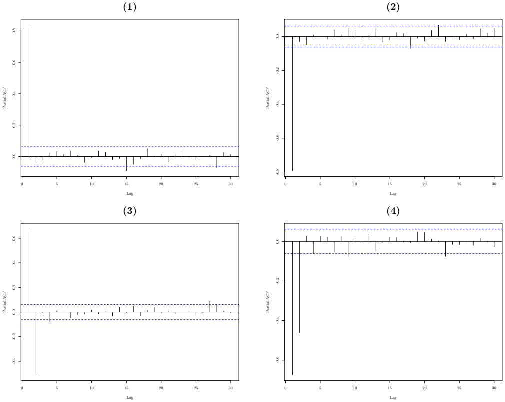
考察如下 AR 模型的偏自相关系数

(1) $x_t = 0.8x_{t-1} + \varepsilon_t$

(2) $x_t = -0.8x_{t-1} + \varepsilon_t$

(3) $x_t = x_{t-1} - 0.5x_{t-2} + \varepsilon_t$

(4) $x_t = -x_{t-1} - 0.5x_{t-2} + \varepsilon_t$



MA 模型的定义

- 具有如下结构的模型称为 q 阶移动平均模型,简记为 MA(q)

$$\begin{cases} x_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-q} & (26) \\ \theta_q \neq 0 & (27) \\ \mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0, \quad \mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2, \quad \mathbb{E}(\varepsilon_t\varepsilon_s) = 0, \quad s \neq t & (28) \end{cases}$$

- 特别当 $\mu = 0$ 时,称为中心化 MA(q) 模型
- 引进延迟算子后,MA(q) 可简记为

$$x_t = \Theta(B)\,\varepsilon_t. \tag{29}$$

其中,

$$\Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q$$

MA(q): 自协方差函数 q 阶截尾, 自相关系数 q 阶截尾

$$
\begin{aligned}
\gamma_k &= \mathbb{E}\left[(x_t-\mu)(x_{t-k}-\mu)\right] \\
&= \mathbb{E}\Big[(\varepsilon_t-\theta_1\varepsilon_{t-1}-\theta_2\varepsilon_{t-2}-\cdots-\theta_q\varepsilon_{t-q}) \\
&\quad (\varepsilon_{t-k}-\theta_1\varepsilon_{t-1}-\theta_2\varepsilon_{t-2}-\cdots-\theta_q\varepsilon_{t-k-q})\Big]
\end{aligned} \tag{30}
$$

$$
= \begin{cases}
\left(1+\theta_1^2+\cdots+\theta_q^2\right)\sigma_\varepsilon^2, & k=0 \\
\left(-\theta_k+\sum_{i=1}^{q-k}\theta_i\theta_{k+i}\right)\sigma_\varepsilon^2, & 1\le k\le q \\
0, & k>q
\end{cases} \tag{31}
$$

MA(q): 自协方差函数 q 阶截尾, 自相关系数 q 阶截尾

$$
\begin{aligned}
\rho_k &= \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \\
&= \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \frac{-\theta_k + \sum_{i=1}^{q-k} \theta_i \theta_{k+i}}{1+\theta_1^2+\cdots+\theta_q^2}, & 1 \le k \le q \\ 0, & k > q \end{cases}
\end{aligned} \tag{32}
$$

逆函数的递推公式

- 记
$$I(B)=\frac{1}{\Theta(B)}=\sum_{i=0}^{\infty} I_iB^i$$
与 Green 函数的递推公式完全类似,逆函数的递推公式为
$$\begin{cases} I_0 = 1 \\ I_i = \sum_{j=1}^{i} I_{i-j}\theta'_j \quad i \geqslant 1 \end{cases} \tag{33}$$

其中，

$$\theta'_j = \begin{cases} \theta_j &, \quad j \leqslant q \\ 0 &, \quad j > q \end{cases}$$

- 可逆 MA(q) 可以表示成 AR(∞)，因此 MA(q) 偏自相关系数 ∞ 截尾，即具有拖尾性

MA(q)模型的可逆性

- MA 模型的识别性
- 考虑如下 MA(1) 模型

(1) $x_t = \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1}$

(2) $x_t = \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}$

模型(1)和模型(2)的理论自相关系数均为

$$\rho_k = \begin{cases} -0.4 & \text{if } k = 1 \\ 0 & \text{if } k \geqslant 2 \end{cases}$$

MA(q)模型的可逆性

- 考虑如下 MA(2) 模型

  (3) $x_t = \varepsilon_t - \frac{4}{5}\varepsilon_{t-1} + \frac{16}{25}\varepsilon_{t-2}$

  (4) $x_t = \varepsilon_t - \frac{5}{4}\varepsilon_{t-1} + \frac{25}{16}\varepsilon_{t-2}$

  模型(3)和模型(4)的理论自相关系数均为

$$\rho_k = \begin{cases} -0.64012 \text{ if } & k = 1 \\ 0.31256 & \text{if } k = 2 \\ 0 & \text{if } k \geqslant 3 \end{cases}$$

MA(q) 模型的可逆性

- 可逆 MA 模型的定义
  - 若一个 MA 模型能够表示成收敛的 AR 模型形式，那么 MA 模型称为可逆 MA 模型
- 可逆性的重要性
  - 依相关系数唯一识别可逆 MA 模型
- 以 MA(1) 为例

MA 表示	模型 1：$x_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$	模型 2：$x_t = \varepsilon_t - \frac{1}{\theta}\varepsilon_{t-1}$
AR 表示	模型 1：$\frac{x_t}{1-\theta B} = \varepsilon_t$	模型 2：$\frac{x_t}{1-\frac{1}{\theta}B} = \varepsilon_t$
自相关系数	$\rho = \frac{-\theta}{1+\theta^2}$	
可逆性条件	$\lvert\theta\rvert < 1$	$\lvert\theta\rvert > 1$

MA(q) 模型的可逆条件

- MA(q) 模型，$\frac{x_t}{\Theta(B)} = \varepsilon_t, \Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \cdots \theta_q B^q$．假设 $\left\{\frac{1}{\lambda_i}\right\}_{i=1}^{q}$ 是系数多项式 $\Theta(B)$ 的 q 个根,则 $\Theta(B)$ 可以分解为

$$\Theta(B) = \prod_{i=1}^{q} (1 - \lambda_k B).$$

MA(q) 模型的可逆条件

- MA(q) 模型的可逆条件是：
  - MA(q) 模型的特征根在单位圆内

$$|\lambda_i| < 1$$

  - 等价条件是移动平滑系数多项式的根都在单位圆外

$$\left|\frac{1}{\lambda_i}\right| > 1$$

ARMA 模型的定义

- 具有如下结构的模型称为自回归移动平均模型，简记为 ARMA(p,q)

$$
\begin{cases}
x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \\
\phi_p \neq 0,\ \theta_q \neq 0 \\
\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0, \quad \mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2, \quad \mathbb{E}(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0, \quad s \neq t \\
\mathbb{E}(x_s \varepsilon_t) = 0, \quad \forall s < t
\end{cases}
$$

系数多项式

- 引进延迟算子, 中心化 ARMA(p, q) 可简记为

$$\Phi(B)\, x_t = \Theta(B)\, \varepsilon_t \tag{34}$$

- p 阶自回归多项式

$$\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p$$

- q 阶移动平均多项式

$$\Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \cdots - \theta_q B^q$$

平稳条件与可逆条件

- ARMA(p, q) 的平稳条件
  - p 阶自回归系数多项式的 $\Phi(B) = 0$ 的根都在单位圆外
  - ARMA(p, q) 的平稳性完全由自回归部分的平稳性决定
- ARMA(p, q) 的可逆条件
  - q 阶移动平均系数多项式 $\Theta(B) = 0$ 的根都在单位圆外
  - ARMA(p, q) 的可逆性完全由移动平滑部分的可逆性决定

传递形式与逆转形式

- 传递形式

$$\begin{aligned} x_t &= \Phi^{-1}(B)\Theta(B)\varepsilon_t \\ &= \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} \boxed{G_i}\,\varepsilon_{t-i} \end{aligned}$$

- 逆转形式

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \Theta^{-1}(B)\Phi(B)x_t \\ &= x_t + \sum_{i=1}^{\infty} \boxed{I_i}\,x_{t-i} \end{aligned}$$

$$
\begin{cases}
G_0 = 1 \\
G_i = \sum_{j=1}^{i} G_{i-j}\phi'_j - \theta'_i \quad i \geqslant 1
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
I_0 = 1 \\
I_i = \sum_{j=1}^{i} I_{i-j}\theta'_j - \phi'_i \quad i \geqslant 1
\end{cases}
$$

其中，　　　　其中，

$$
\phi'_j = \begin{cases} \phi_j, & j \leqslant p \\ 0, & j > p \end{cases}
\qquad
\phi'_i = \begin{cases} \phi_i, & i \leqslant p \\ 0, & i > p \end{cases}
$$

$$
\theta'_i = \begin{cases} \theta_i, & i \leqslant q \\ 0, & i > q \end{cases}
\qquad
\theta'_j = \begin{cases} \theta_j, & j \leqslant q \\ 0, & j > q \end{cases}
$$

ARMA(p, q) 模型的统计性质

- 均值

$$\mathbb{E}[x_t] = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1 - \cdots - \phi_p}$$

- 协方差（中心化模型）

$$\gamma(k) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} G_i G_{i+k}$$

- 自相关系数（中心化模型）

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} G_j G_{j+k}}{\sum_{j=0}^{\infty} G_j^2}$$

ARMA模型的相关性特征

模型	自相关系数	偏自相关系数
$\mathrm{AR}(p)$	拖尾	p 阶截尾
$\mathrm{MA}(q)$	q 阶截尾	拖尾
$\mathrm{ARMA}(p,q)$	拖尾	拖尾

单位根检验

布朗运动（Brwonian Motion）

- 标准布朗运动 $W_t(\omega)$ 是定义在完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的连续性随机过程，对于固定的 $\omega \in \Omega$，

$$W_t(\omega) : [0, 1] \mapsto \mathbf{R}.$$

也记为 $W(t)$。

布朗运动（Brwonian Motion）

- 标准布朗运动 $W_t(\omega)$ 是定义在完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的连续性随机过程，对于固定的 $\omega \in \Omega$，

$$W_t(\omega) : [0, 1] \mapsto \mathbf{R}.$$

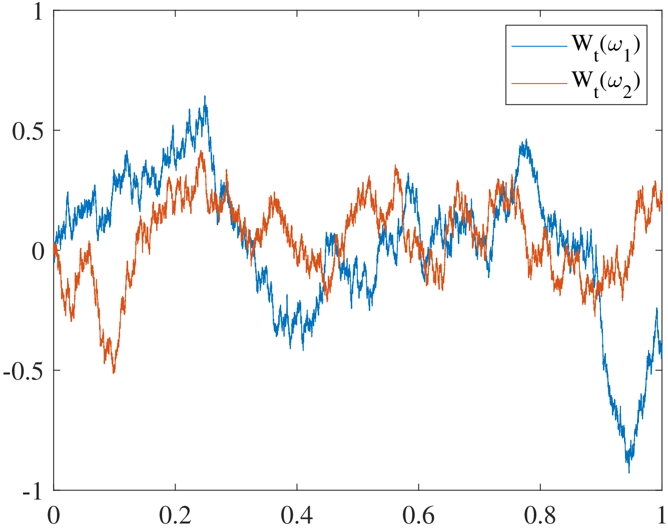
  也记为 $W(t)$。

- 标准布朗运动需满足：

  (a) $W(0) = 0$；

  (b) 对任意 $0 \leqslant t_1 < t_2 < t_3 < t_4 \leqslant 1$，$W(t_2) - W(t_1)$ 和 $W(t_4) - W(t_3)$ 是相互独立的正态随机变量，均值为 0，方差分别为 $t_2 - t_1$ 和 $t_4 - t_3$；

  (c) $W(t)$ 在 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上依概率 1 连续。



1
0.5
0
-0.5
-1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
$W_t(\omega_1)$
$W_t(\omega_2)$

泛函型中心极限定理（The Functional Central Limit Theorem）

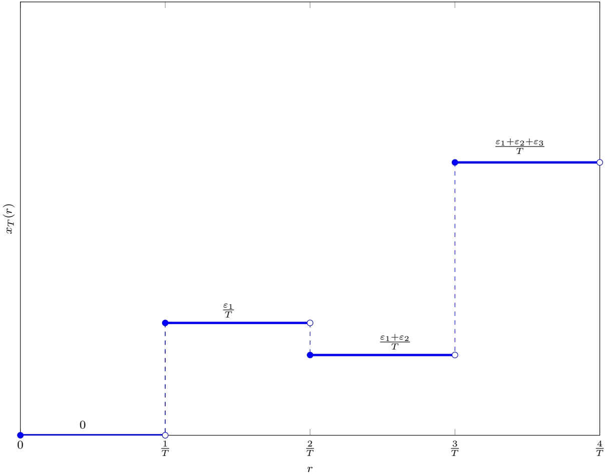
- 定义阶梯函数如下

$$x_T(r)=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{[Tr]}\varepsilon_t=\begin{cases} 0 & 0\leqslant r<1/T \\ \varepsilon_1/T & 1/T\leqslant r<2/T \\ (\varepsilon_1+\varepsilon_2)/T & 2/T\leqslant r<3/T \\ \vdots & \\ (\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_T)/T & r=1 \end{cases}$$

- 标准化有

$$\frac{\sqrt{T}x_T(r)}{\sigma}=\frac{1}{\sigma}\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{[Tr]}\varepsilon_t$$

$x_T(r)$



$\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3}{T}$
$x_T(r)$
$\frac{\varepsilon_1}{T}$
$\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{T}$
0
0
$\frac{1}{T}$
$\frac{2}{T}$
$\frac{3}{T}$
$\frac{4}{T}$
r

$x_T(r)$

- 令 $x_t = \frac{\sum_{\tau=1}^{t} \varepsilon_\tau}{T}$
- $\frac{x_1}{T^2} + \frac{x_2}{T^2} + \cdots + \frac{x_{T-1}}{T^2} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-1} \frac{x_t}{T} = \int_0^1 x_T(r) dr$
- $\frac{x_1}{T^{3/2}} + \frac{x_2}{T^{3/2}} + \cdots + \frac{x_{T-1}}{T^{3/2}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-1} \frac{x_t}{\sqrt{T}} = \int_0^1 \sqrt{T} x_T(r) dr$
- $\frac{x_1^2}{T^2} + \frac{x_2^2}{T^2} + \cdots + \frac{x_{T-1}^2}{T^2} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-1} \left(\frac{x_t}{\sqrt{T}}\right)^2 = \int_0^1 \left(\sqrt{T} x_T(r)\right)^2 dr$

泛函型中心极限定理（The Functional Central Limit Theorem）

- $\forall r \in [0,1]$,

$$\frac{\sqrt{T}x_T(r)}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}\underbrace{\frac{\sqrt{[Tr]}}{\sqrt{T}}}_{\to\sqrt{r}}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{[Tr]}}\sum_{t=1}^{[Tr]}\varepsilon_t}_{\xrightarrow{d}\mathcal{N}(0,\sigma^2)} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,r).$$

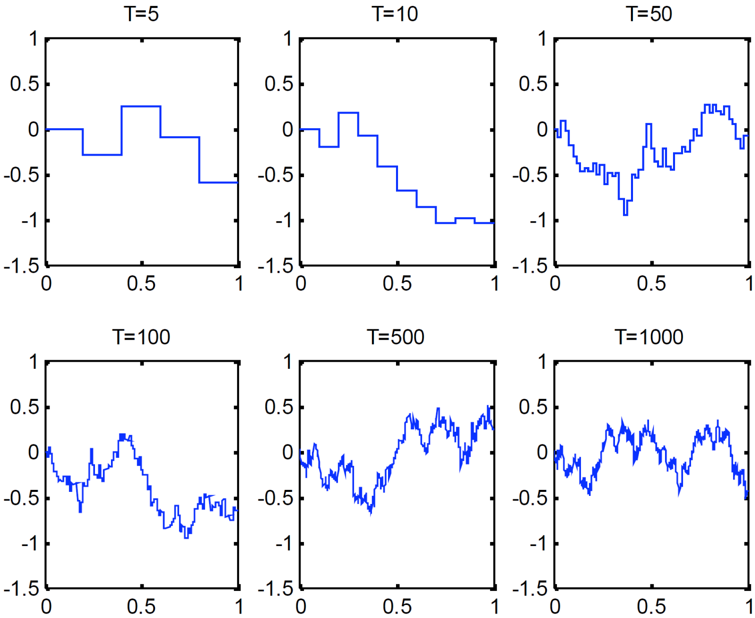
- $\sqrt{T}\left[x_T(r_2) - x_T(r_1)\right]/\sigma \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, r_2 - r_1)$ 与 $\sqrt{T}\left[x_T(r_3) - x_T(r_4)\right]/\sigma \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, r_4 - r_3)$ 相互独立只要 $[r_1, r_2]$ 和 $[r_3, r_4]$ 不重叠.

- $\sqrt{T}x_T(0)/\sigma = 0$
- 当 $T \to \infty$

$$\frac{\sqrt{T}x_T(\cdot)}{\sigma} \xrightarrow{d} W(\cdot), \tag{35}$$

其中,$W(\cdot)$ 表示维纳过程（Weiner process）,或者布朗运动（Brownian motion）

- $\int_0^1 \sqrt{T}x_T(r)dr \xrightarrow{d} \sigma \int_0^1 W(r)dr$
- $\int_0^1 \left(\sqrt{T}x_T(r)\right)^2 dr \xrightarrow{d} \sigma^2 \int_0^1 [W(r)]^2 dr$


T=5
T=10
T=50
T=100
T=500
T=1000
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
0.5
1

连续映射定理和一些公式

- 连续映射定理:如果
$$S_T(\cdot) \xrightarrow{d} S(\cdot)$$
并且 $g(\cdot)$ 是连续性泛函(比如 $g\left(S(\cdot)\right) = a + bS(\cdot)$ 或者 $g\left(S(\cdot)\right) = \int S(r)dr$),则
$$g\left(S_T(\cdot)\right) \xrightarrow{d} g(S(\cdot)). \tag{36}$$

- 求和公式
    - $\displaystyle\sum_{t=1}^{T} t = \frac{T(T+1)}{2} \Rightarrow T^{-2}\sum_{t=1}^{T} t \to \frac{1}{2}$
    - $\displaystyle\sum_{t=1}^{T} t^2 = \frac{T(T+1)(2T+1)}{6} \Rightarrow T^{-3}\sum_{t=1}^{T} t^2 \to \frac{1}{3}$
    - $T^{-(v+1)}\sum_{t=1}^{T} t^v \to \frac{1}{v+1}$

单位根检验

- 考虑如下 AR(1) 模型

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \overset{i.i.d.}{\sim} \left(0, \sigma^2\right)$$

单位根检验

- 考虑如下 AR(1) 模型

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \overset{i.i.d.}{\sim} \left(0, \sigma^2\right)$$

- OLS 估计，$\hat{\phi}_1$，

$$\hat{\phi}_1 = \frac{\sum x_t x_{t-1}}{\sum x_{t-1}^2} \tag{37}$$

单位根检验

- 考虑如下原假设

$$H_0 : \phi_1 = 1$$

且在 H_0 下，

$$\hat{\phi}_1 - 1 = \frac{\sum x_{t-1}\varepsilon_t}{\sum x_{t-1}^2} \tag{38}$$

单位根检验

- 考虑如下原假设

$$H_0 : \phi_1 = 1$$

且在 H_0 下，

$$\hat{\phi}_1 - 1 = \frac{\sum x_{t-1}\varepsilon_t}{\sum x_{t-1}^2} \tag{38}$$

- 假设 $x_0 = 0, \phi_1 = 1$, 则

$$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_t$$

单位根检验

$$
\begin{aligned}
T\left(\hat{\phi}_1 - 1\right) &= \frac{(1/T)\sum x_{t-1}\varepsilon_t}{(1/T^2)\sum x_{t-1}^2} \\
&= \frac{(1/T)\frac{1}{2}\left(x_T^2 - \sum \varepsilon_t^2\right)}{(1/T^2)\sum x_{t-1}^2} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{T}}x_T\right)^2 - \frac{1}{T}\sum \varepsilon_t^2\right]}{\frac{1}{T}\sum\left(\frac{1}{\sqrt{T}}x_{t-1}\right)^2}
\end{aligned}
$$

Dickey-Fuller 统计量的分布

- 对于

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \overset{i.i.d.}{\sim} \left(0, \sigma^2\right), \quad t = 1 \ldots, T$$

且

$$\hat{\phi}_1 = \frac{\sum x_t x_{t-1}}{\sum x_{t-1}^2}$$

则在 H_0 下

$$T\left(\hat{\phi}_1 - 1\right) \xrightarrow{d} \frac{\left\{[W(1)]^2 - 1\right\}}{2\int_0^1 [W(r)]^2 dr}. \tag{39}$$

Dickey-Fuller 统计量的分布

通常的 t-统计量不再具有 t-分布的形式。令 $\hat{\varepsilon}_t = x_t - \hat{\phi}_1 x_{t-1}$，$s_T^2 = \sum \hat{\varepsilon}_t^2 / T \xrightarrow{p} \sigma^2$

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{\hat{\phi}_1 - 1}{\hat{\sigma}_{\hat{\phi}_1}} \\
&= \frac{\frac{1}{T}\sum x_{t-1}\varepsilon_t}{\sqrt{s_T^2 \left\{\frac{1}{T^2}\sum x_{t-1}^2\right\}^{1/2}}} \\
&\xrightarrow{d} \frac{\frac{\sigma^2}{2}\left\{[W(1)]^2 - 1\right\}}{\sigma\left\{\sigma^2 \int_0^1 [W(r)]^2 dr\right\}^{1/2}} \\
&= \frac{\left\{[W(1)]^2 - 1\right\}}{2\left\{\int_0^1 [W(r)]^2 dr\right\}^{1/2}}
\end{aligned}
$$

DF 检验的类型：类型 1

- 假设检验形式

$$\begin{cases} H_0 & : & x_t & = & x_{t-1} + \varepsilon_t \\ H_1 & : & x_t & = & \phi_1 x_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{with } |\phi_1| < 1 \end{cases}$$

等价于

$$\begin{cases} H_0 & : & \Delta x_t & = & \varepsilon_t \\ H_1 & : & \Delta x_t & = & \beta x_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{with } \beta < 0 \end{cases}$$

DF 检验的类型：类型 1

- OLS 检验形式

$$\Delta x_t = \beta x_{t-1} + e_t, \tag{40}$$

- 在 H_0 下，

$$T\hat{\beta}_T \xrightarrow{d} \frac{\left\{\chi^2_{(1)} - 1\right\}}{2\int_0^1 [W(r)]^2 dr},$$

其中，$\hat{\beta}_T$ 表示 (40) 中 β 的 OLS 估计量。同时

$$\frac{\hat{\beta}_T}{\widehat{se}\left(\hat{\beta}_T\right)} \xrightarrow{d} \frac{1/2\left\{\chi^2_{(1)} - 1\right\}}{\left[\int_0^1 [W(r)]^2 dr\right]^{1/2}}.$$

DF 检验的类型：类型 2a

- 假设检验形式

$$
\begin{cases}
H_0 & : \ \Delta x_t \ = \ \varepsilon_t \\
H_1 & : \ \Delta x_t \ = \ \alpha + \beta x_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{with } \beta < 0
\end{cases}
$$

DF 检验的类型：类型 2a

- OLS 检验形式

$$\Delta x_t = \alpha + \beta x_{t-1} + e_t \tag{41}$$

在 H_0 下，

$$T\hat{\beta}_T \xrightarrow{d} \frac{1/2\left(\chi^2_{(1)} - 1\right) - W(1)\int_0^1 W(r)dr}{\int_0^1 W^2(r)dr - \left(\int_0^1 W(r)dr\right)^2}$$

其中，$\hat{\beta}_T$ 表示 (41) 中 β 的 OLS 估计量。同时

$$\frac{\hat{\beta}_T}{\widehat{se}\left(\widehat{\beta}_T\right)} \xrightarrow{d} \frac{1/2\left(\chi^2_{(1)} - 1\right) - W(1)\int_0^1 W(r)dr}{\left(\int_0^1 W^2(r)dr - \left(\int_0^1 W(r)dr\right)^2\right)^{1/2}}$$

DF 检验的类型：类型 3

- 假设检验形式

$$
\begin{cases}
H_0 \; : \; \Delta x_t \; = \; \varepsilon_t \\
H_1 \; : \; \Delta x_t \; = \; \alpha + \beta x_{t-1} + \delta t + \varepsilon_t \quad \text{with } \beta < 0
\end{cases}
$$

或者

$$
\begin{cases}
H_0 \; : \; \Delta x_t \; = \; \alpha + \varepsilon_t \\
H_1 \; : \; \Delta x_t \; = \; \alpha + \beta x_{t-1} + \delta t + \varepsilon_t \quad \text{with } \beta < 0
\end{cases}
$$

DF 检验的类型：类型 3

- OLS 检验形式

$$x_t = \alpha + \phi x_{t-1} + \delta t + e_t \tag{42}$$

或者

$$\Delta x_t = \alpha + \beta x_{t-1} + \delta t + e_t$$

Augmented DF (ADF) 检验

- 考虑如下 AR(p) 模型（$p \geqslant 2$）

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t$$

可以等价表示为

$$\Delta x_t = \rho x_{t-1} - \beta_1 \Delta x_{t-1} - \cdots - \beta_{p-2} \Delta x_{t-p+2} - \beta_{p-1} \Delta x_{t-p+1} + \varepsilon_t$$

其中,

$$\begin{aligned} \rho &= \phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_p - 1 \\ \beta_j &= \phi_{j+1} + \phi_{j+2} + \cdots + \phi_p, \quad j = 1, 2, \cdots, p-1 \end{aligned}$$

- 假设检验形式

$$\begin{cases} H_0 : \rho = 0 \\ H_1 : \rho \neq 0 \end{cases}$$

ADF 的 OLS 检验形式

- 类型 1

$$\Delta x_t = \rho x_{t-1} + \beta_1 \Delta x_{t-1} + \cdots + \beta_{p-1} \Delta x_{t-p+1} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \underset{\smile}{\overset{i.i.d.}{\sim}} \left(0, \sigma^2\right)$$

- 类型 2

$$\Delta x_t = \alpha + \rho x_{t-1} + \beta_1 \Delta x_{t-1} + \cdots + \beta_{p-1} \Delta x_{t-p+1} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \underset{\smile}{\overset{i.i.d.}{\sim}} \left(0, \sigma^2\right)$$

ADF 的 OLS 检验形式

- 类型 3

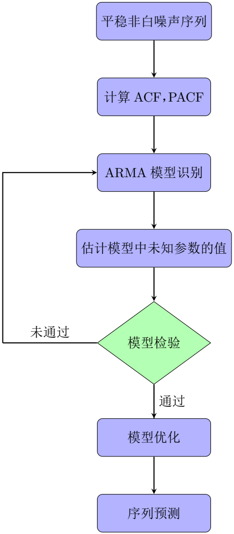
$$\Delta x_t = \alpha + \delta t + \rho x_{t-1} + \beta_1 \Delta x_{t-1} + \cdots + \beta_{p-1} \Delta x_{t-p+1} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \underset{\sim}{\overset{i.i.d.}{}} \left(0, \sigma^2\right)$$

- 检验统计量

$$\frac{\hat{\rho}}{\widehat{se}\left(\hat{\rho}\right)} \sim \text{DF } t \text{ statistic}$$

平稳序列建模

建模步骤


平稳非白噪声序列
计算 ACF，PACF
ARMA 模型识别
估计模型中未知参数的值
模型检验
未通过
通过
模型优化
序列预测

样本相关系数

- 样本自相关系数

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (x_t - \bar{x}) (x_{t+k} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^{n} (x_t - \bar{x})^2}, \forall\, 0 < k < n \tag{43}$$

样本偏自相关系数

- 样本偏自相关系数

$$\hat{\phi}_{kk} = \frac{\hat{D}_k}{\hat{D}}, \forall\, 0 < k < n, \tag{44}$$

其中，

$$\hat{D} = \begin{vmatrix} 1 & \hat{\rho}_1 & \cdots & \hat{\rho}_{k-1} \\ \hat{\rho}_1 & 1 & \cdots & \hat{\rho}_{k-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{\rho}_{k-1} & \hat{\rho}_{k-2} & \cdots & 1 \end{vmatrix} \qquad \hat{D}_k = \begin{vmatrix} 1 & \hat{\rho}_1 & \cdots & \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_1 & 1 & \cdots & \hat{\rho}_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{\rho}_{k-1} & \hat{\rho}_{k-2} & \cdots & \hat{\rho}_k \end{vmatrix}$$

样本相关系数的的渐进分布

- Bartlett

$$\hat{\rho}_k \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{n}\right), n \to \infty$$

- Quenouille

$$\hat{\phi}_{kk} \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{n}\right), n \to \infty$$

模型定阶的经验方法

- 95% 的置信区间

$$\Pr\left(-\frac{2}{\sqrt{n}} \leq \hat{\rho}_k \leq \frac{2}{\sqrt{n}}\right) \geq 0.95$$

$$\Pr\left(-\frac{2}{\sqrt{n}} \leq \hat{\phi}_{kk} \leq \frac{2}{\sqrt{n}}\right) \geq 0.95$$

- 模型定阶的经验方法
  - 如果样本（偏）自相关系数在最初的 d 阶明显大于两倍标准差范围，而之后几乎 95% 的自相关系数都落在 2 倍标准差的范围内，且由非零（偏）自相关系数衰减为小值波动的过程非常突然。这时，通常视为（偏）自相关系数截尾，截尾阶数为 d .

模型识别

$\hat{\rho}_k$	$\hat{\phi}_{kk}$	选择模型
拖尾	p 阶截尾	AR(p)
q 阶截尾	拖尾	MA(q)
拖尾	拖尾	ARMA(p, q)

参数估计

- 考虑非中心化 ARMA(p,q) 模型 $x_t = \mu + \frac{\Theta_q(B)}{\Phi_p(B)}\varepsilon_t$，其中

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_t &\sim \left(0, \sigma_\varepsilon^2\right) \\
\Theta_q(B) &= 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q \\
\Phi_p(B) &= 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p
\end{aligned}
$$

- 待估参数
  - $p+q+2$ 个未知参数:

$$
\phi_1, \cdots, \phi_p, \theta_1, \cdots, \theta_q, \mu, \sigma_\varepsilon^2
$$

- 矩估计、极大似然估计、最小二乘估计

模型检验

- 模型的显著性检验
  - 整个模型对信息的提取是否充分
- 参数的显著性检验
  - 模型结构是否最简

模型的显著性检验

- 假设条件
  - 原假设：残差序列为白噪声序列

$$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_m = 0, \forall m \geq 1$$

  - 备择假设：残差序列为非白噪声序列

$$H_1 : \text{ 至少存在某个 } \rho_k \neq 0, \forall m \geq 1, k \leq m$$

- LB(Ljung-Box) 检验统计量

$$LB = n(n+2)\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k}\right) \sim \chi^2(m) \tag{45}$$

其中，$\hat{\rho}_k$ 表示 k 阶样本自相关系数，通过 (43) 计算。

模型选择:AIC 和 BIC

- AIC : $T \ln \hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2} + 2(p + q + 2)$
- BIC : $T \ln \hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2} + (\ln T)\,(p + q + 2)$

模型选择:AIC 和 BIC

- AIC : $T \ln \hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2} + 2(p + q + 2)$
- BIC : $T \ln \hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2} + (\ln T)\,(p + q + 2)$
- 相对最小的 AIC 和 BIC 对应于相对最最优的模型

序列预测

- 因为平稳 ARMA 模型具有 AR(∞) 表示结构，

$$\sum_{j=0}^{\infty} I_j x_{t-j} = \varepsilon_t$$

所以可以通过递推法,基于现有序列的观察值 $x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, \cdots$，预测未来时刻的序列值

$$\begin{aligned}
\widehat{x}_{t+1} &= -I_1 x_t - I_2 x_{t-1} - I_3 x_{t-2} - \cdots \\
\widehat{x}_{t+2} &= -I_1 \widehat{x}_{t+1} - I_2 x_t - I_3 x_{t-1} - \cdots \\
\widehat{x}_{t+3} &= -I_1 \widehat{x}_{t+2} - I_2 \widehat{x}_{t+1} - I_3 x_t - \cdots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

序列分解

- 根据 ARMA(p,q) 的 MA(∞) 表示，未来时刻的序列值 x_{t+l} 可以分解为

$$x_{t+l} = \underbrace{(\varepsilon_{t+l} + G_1\varepsilon_{t+l-1} + \cdots + G_{l-1}\varepsilon_{t+1})}_{:= e_t(l)} + \underbrace{(G_l\varepsilon_t + G_{l+1}\varepsilon_{t-1} + \cdots)}_{:= \widehat{x}_t(l)}.$$

并且根据 ARMA(p,q) 的线性特征，$\widehat{x}_t(l)$ 同样可以表示成已知历史信息的线性函数

$$\widehat{x}_t(l) = \sum_{i=0}^{\infty} D_i x_{t-i}.$$

$\widehat{x}_t(l)$ 也称为基于历史信息的未来 l 步预测值

- 条件均值和方差

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(x_{t+l} \mid x_t, x_{t-1}, \cdots\right) &= \widehat{x}_t(l) \\
\operatorname{Var}\left(x_{t+l} \mid x_t, x_{t-1}, \cdots\right) &= \operatorname{Var}\left[e_t(l)\right] \\
&= \sum_{i=0}^{l-1} G_i^2 \sigma_{\varepsilon}^2
\end{aligned}
$$

AR(p) 序列预测

预测值

$$
\begin{aligned}
\widehat{x}_t(l) &= \mathbb{E}\left(x_{t+l} \mid x_t, x_{t-1}, \cdots\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\phi_1 x_{t+l-1} + \cdots + \phi_p x_{t+l-p} + \varepsilon_{t+l} \mid x_t, x_{t-1}, \cdots\right) \\
&= \phi_1 \widehat{x}_t(l-1) + \cdots + \phi_p \widehat{x}_t(l-p)
\end{aligned}
$$

其中，

$$
\widehat{x}_t(k) = \begin{cases} \widehat{x}_t(k) & , \quad k \geqslant 1 \\ x_{t+k} & , \quad k \leqslant 0 \end{cases}
$$

MA(q) 序列预测

- 当 $l \leqslant q$（预测步长小于或等于 MA(q) 模型阶数）时，

$$\begin{aligned} x_{t+l} &= \mu + \varepsilon_{t+l} - \theta_1 \varepsilon_{t+l-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t+l-q} \\ &= \left(\varepsilon_{t+l} - \theta_1 \varepsilon_{t+l-1} - \cdots - \theta_{l-1} \varepsilon_{t+1}\right) + \left(\mu - \theta_l \varepsilon_t - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t+l-q}\right) \end{aligned}$$

- 当 $l > q$（预测步长大于 MA(q) 模型阶数）时，

$$\begin{aligned} x_{t+l} &= \mu + \varepsilon_{t+l} - \theta_1 \varepsilon_{t+l-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t+l-q} \\ &= \left(\varepsilon_{t+l} - \theta_1 \varepsilon_{t+l-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t+l-q}\right) + \mu \end{aligned}$$

预测值为

$$\widehat{x}_t(l) = \begin{cases} \mu - \sum_{i=l}^{q} \theta_i \varepsilon_{t+l-i} & , \quad l \leqslant q \\ \mu & , \quad l > q \end{cases}$$

预测方差

$$\mathrm{Var}\left[e_t(l)\right] = \begin{cases} \left(1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_{l-1}^2\right) \sigma_\varepsilon^2 & , \quad l \leqslant q \\ \left(1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2\right) \sigma_\varepsilon^2 & , \quad l > q \end{cases}$$

ARMA(p, q) 序列预测

预测值

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left(\phi_1 x_{t+l-1} + \cdots + \phi_p x_{t+l-p} + \varepsilon_{t+l} - \theta_1 \varepsilon_{t+l-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t+l-q}\right. \\
&\qquad \left. \mid x_t, x_{t-1}, \cdots \right) \\
&= \begin{cases} \phi_1 \widehat{x}_t(l-1) + \cdots + \phi_p \widehat{x}_t(l-p) - \sum_{i=l}^{q} \theta_i \varepsilon_{t+l-i} & l \leqslant q \\ \phi_1 \widehat{x}_t(l-1) + \cdots + \phi_p \widehat{x}_t(l-p) & l > q \end{cases}
\end{aligned}
$$

其中，

$$
\widehat{x}_t(k) = \begin{cases} \widehat{x}_t(k) & , \quad k \geqslant 1 \\ x_{t+k} & , \quad k \leqslant 0 \end{cases}
$$

修正预测原理

- 在旧的信息 $x_t, x_{t-1}, \cdots$ 的基础上，x_{t+l} 的预测值为

$$\widehat{x}_t(l) = G_l\varepsilon_t + G_{l+1}\varepsilon_{t-1} + \cdots$$

- 假设获得一个新的观测值 x_{t+1}
  - x_{t+l} 的修正预测为

$$\widehat{x}_{t+1}(l-1) = G_{l-1}\varepsilon_{t+1} + G_l\varepsilon_t + G_{l+1}\varepsilon_{t-1} + \cdots = G_{l-1}\varepsilon_{t+1} + \widehat{x}_t(l)$$

其中，$\varepsilon_{t+1} = x_{t+1} - \widehat{x}_t(1)$

- 修正预测误差为

$$e_{t+1}(l-1) = G_0\varepsilon_{t+l} + \cdots + G_{l-2}\varepsilon_{t+2}$$

- 预测方差为

$$\mathrm{Var}\left[e_{t+1}(l-1)\right] = \left(G_0^2 + \cdots + G_{l-2}^2\right)\sigma_\varepsilon^2$$

总结

- 差分运算、延迟算子、线性差分方程
- ARMA 模型
  - 模型的基本定义和性质
  - 平稳性的判别、检验
  - 泛函型中心极限定理、单位根检验
- 平稳序列建模
  - 模型识别
  - 参数估计: 矩估计 (和 Yule-Walker 方程的联系), 极大似然估计, 最小二乘估计
  - 模型检验
  - ARMA 模型预测