安徽大学 2025 年 – 2026 学年第 1 学期

《时间序列分析（初级）》（期中测验（B卷）参考答案）

一、简答题（每小题 5 分，共 10 分）

1. 参考课本内容给出第一类型的 DF 检验形式，包括原假设，备择假设，以及在原假设下的检验统计量。
2. 参考课本内容陈述对平稳时间序列进行分解的 Wold 定理， Wold 分解定理陈述的确定性部分可以用 ARMA(p,q) 模型中的 AR(p) 模型刻画，而 Wold 分解定理陈述的随机部分则可以通过 ARMA(p,q) 模型中的 MA(q) 模型刻画。

二、计算题（每小题 10 分，共 30 分）

1. 计算 MA(1) 的一阶自相关系数 $\rho_1=\frac{-\theta}{1+\theta^2}$，并对 ρ_1 关于 θ 求导有

$$\frac{d\rho_1}{d\theta}=\frac{\theta^2-1}{\left(1+\theta^2\right)^2}.$$

注意到当 $\theta\in(-\infty,-1)$ 时， $\frac{d\rho_1}{d\theta}>0$；当 $\theta\in(-1,1)$ 时，$\frac{d\rho_1}{d\theta}<0$；当 $\theta\in(1,\infty)$ 时，$\frac{d\rho_1}{d\theta}>0$, 所以 ρ_1 在 $\theta=-1$ 时取最大值，$\rho_1=0.5$；在$\theta=1$ 时取最小值，$\rho_1=-0.5$.

2. (1) 注意到对于 AR(1)， $\rho_k=\phi^k$，所以

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(b_t,b_{t-k})&=\operatorname{Cov}(x_t-\phi x_{t+1},x_{t-k}-\phi x_{t-k+1})\\&=\operatorname{Cov}(x_t,x_{t-k})-\phi\operatorname{Cov}(x_t,x_{t-k+1})-\phi\operatorname{Cov}(x_{t+1},x_{t-k})+\phi^2\operatorname{Cov}(x_{t+1},x_{t-k+1})\\&=\left(\phi^k-\phi\phi^{k-1}-\phi\phi^{k+1}+\phi^2\phi^k\right)\\&=0\end{aligned}$$

(2) 因为

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(b_t,x_{t+k})=\operatorname{Cov}(x_t-\phi x_{t+1},x_{t+k})&=\operatorname{Cov}(x_t,x_{t+k})-\phi\operatorname{Cov}(x_{t+1},x_{t+k})\\&=\phi^k-\phi\phi^{k-1}\\&=0\end{aligned}$$

所以，b_t 与 x_{t+k} 线性不相关。

3. ARMA(1,1) 的 Green 函数为 $G_0=1$，$G_1=G_0\times0.8-(-0.6)=1.4$，由预测方差的公式可知

$$\operatorname{Var}[e_t(2)]=G_0^2\sigma_\varepsilon^2+G_1^2\sigma_\varepsilon^2=\left(1^2+1.4^2\right)\sigma_\varepsilon^2=2.96\sigma_\varepsilon^2$$

三、证明题（每小题 10 分，共 10 分）

(1)

$$T^{-3/2}\sum_{t=1}^{T}x_{t-1}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{x_{t-1}}{\sqrt{T}}=\int_0^1\left(\frac{\sqrt{\lfloor Tr\rfloor}}{\sqrt{T}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\lfloor Tr\rfloor}}\sum_{t=1}^{\lfloor Tr\rfloor}\varepsilon_t\right)dr\xrightarrow{d}\int_0^1\sigma_\varepsilon W(r)dr$$

(2) 注意到，

$$
\begin{aligned}
T^{-3/2}\sum_{t=1}^{T}x_{t-1} &= T^{-3/2}\left[\varepsilon_1+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)+\ldots+(\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_{T-1})\right] \\
&= T^{-3/2}\sum_{t=1}^{T}(T-t)\varepsilon_t \\
&= T^{-1/2}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t - T^{-3/2}\sum_{t=1}^{T}t\varepsilon_t
\end{aligned}
$$

因此，由 (1) 中的结论有

$$
\begin{aligned}
T^{-3/2}\sum_{t=1}^{T}t\varepsilon_t &= T^{-1/2}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t - T^{-3/2}\sum_{t=1}^{T}x_{t-1} \\
&\xrightarrow{d} \sigma_\varepsilon W(1) - \sigma_\varepsilon\int_0^1 W(r)dr.
\end{aligned}
$$

由 Riemann 积分的定义和 Brownian 运动的性质可知， $\sigma_\varepsilon W(1) \sim \sigma_\varepsilon\mathcal{N}(0,1)$，并且令 $0=t_0<t_1<\cdots<t_M=1$ 且 $\forall\, 0\leqslant k\leqslant M-1$， $\Delta=t_{k+1}-t_k$，则

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 W(r)dr &:= \lim_{M\to\infty}\sum_{k=0}^{M-1}W(t_k)\Delta \\
&= \lim_{M\to\infty}\sum_{k=0}^{M-1}W(t_k)\left(t_{k+1}-t_k\right) \\
&= \lim_{M\to\infty}\sum_{k=1}^{M}\left[W(t_{k-1})-W(t_k)\right]t_k + W(t_M)t_M \\
&= \lim_{M\to\infty}\sum_{k=1}^{M}\left[W(t_{k-1})-W(t_k)\right]t_k + W(1)
\end{aligned}
$$

因此 $\int_0^1 W(r)dr$ 也服从正态分布，进而有

$$
\sigma_\varepsilon W(1)-\sigma_\varepsilon\int_0^1 W(r)dr := \lim_{M\to\infty}\sigma_\varepsilon\sum_{k=1}^{M}\left[W(t_{k-1})-W(t_k)\right]t_k
$$

也为正态分布，并且

$$
\mathbb{E}\left[\sigma_\varepsilon W(1)-\sigma_\varepsilon\int_0^1 W(r)dr\right]=0.
$$

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Var}\left[\sigma_\varepsilon W(1)-\sigma_\varepsilon\int_0^1 W(r)dr\right] \\
&= T^{-3}\sum_{t=1}^{T}t^2\sigma_\varepsilon^2=\frac{\sigma_\varepsilon^2}{3}.
\end{aligned}
$$