安徽大学 2025 年 – 2026 学年第 1 学期
《时间序列分析（初级）》（期中测验（A卷）参考答案）

一、简答题（每小题 5 分，共 10 分）

1. 参考课本讨论宽平稳时间序列和严平稳时间序列的定义。
2. 纯随机序列（白噪声序列）是一类特殊的白噪声序列，用 Q 检验统计量和 LB 检验统计量检验。参考课本内容做更详尽的展开。

二、计算题（每小题 10 分，共 30 分）

1. 由 Yule-Walker 方程，或者偏自相关系数的定义可知 $\phi_{11} = \rho_1$，而如果序列 $\{x_t\}$ 由平稳的 AR(2) 模型生成，$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}$，因此
$$\phi_{11} = \rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2} = \frac{1}{1-(-0.6)} = \frac{5}{8}.$$
2. (1) $\gamma_x(k) = \phi^k \gamma_x(0)$，$(1-\phi B)x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j} \Rightarrow \gamma_x(0) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}$，所以 $\gamma_x(k) = \phi^k \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}$.

   (2)
$$\begin{aligned}
\gamma_z(k) &= \operatorname{Cov}(z_t, z_{t-k}) \\
&= \operatorname{Cov}(x_t - x_{t-1}, x_{t-k} - x_{t-1-k}) \\
&= (\operatorname{Cov}(x_t, x_{t-k}) + \operatorname{Cov}(x_t, -x_{t-k-1}) + \operatorname{Cov}(-x_{t-1}, x_{t-k}) + \operatorname{Cov}(-x_{t-1}, -x_{t-k-1})) \\
&= \left(\phi^k - \phi^{k+1} - \phi^{k-1} + \phi^k\right) \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2} \\
&= \left[2\phi - \phi^2 - 1\right] \phi^{k-1} \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2} \\
&= -\left[(1-\phi)^2\right] \phi^{k-1} \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2} = -\left[\frac{1-\phi}{1+\phi}\right] \phi^{k-1} \sigma_\varepsilon^2.
\end{aligned}$$

3. (1) 延迟算子多项式方程为
$$\phi(z) = 1 + 0.2z - 0.48z^2 = 0,$$
   并且有解 $z_1 = 5/3$，$z_2 = -5/4$，$|z_1| > 1, |z_2| > 1$，所以平稳.

   (2) AR(1) 和 MA(1) 部分的延迟算子多项式方程分别为 $\phi(z) = 1 + 0.6z = 0$ 和 $\theta(z) = 1 + 1.2z = 0$，且分别有解 $z = -5/3$, 且 $|-5/3| > 1$ 和 $z = -5/6$, 且 $|-5/6| < 1$，所以该模型平稳但不可逆.

三、证明题（每小题 10 分，共 10 分）

(1) ϕ_1 的 OLS 估计量 $\hat{\phi}$ 为
$$\hat{\phi} = \frac{\sum_{t=1}^{T} x_{t-1} x_t}{\sum_{t=1}^{T} x_{t-1}^2}.$$

(2) 当 $\phi = 1$ 时
$$\hat{\phi} - 1 = \frac{\sum x_{t-1} \varepsilon_t}{\sum x_{t-1}^2},$$

且

$$x_t = x_0 + \sum_{j=1}^{t} \varepsilon_j.$$

定义阶梯函数 $y_T(r)$ 如下

$$y_T(r) = x_0 + \sum_{t=1}^{[Tr]} \varepsilon_t = \begin{cases} x_0 \ \text{ if } \ 0 \leqslant r < \frac{1}{T} \\ x_0 + \varepsilon_1/T \ \text{ if } \ \frac{1}{T} \leqslant r < \frac{2}{T} \\ x_0 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/T \ \text{ if } \ \frac{2}{T} \leqslant r < \frac{3}{T} \\ \vdots \\ x_0 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_T)/T \ \text{ if } \ r = 1 \end{cases}$$

由泛函型中心极限定理可知

$$\sqrt{T}\left[y_T(r) - x_0\right] = \frac{1}{\sqrt{T}}\left(\sum_{t=1}^{\lfloor Tr \rfloor} \varepsilon_t\right) = \underbrace{\frac{\sqrt{\lfloor Tr \rfloor}}{\sqrt{T}}}_{\substack{\to \sqrt{r} \\ \text{as } T \to \infty}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\lfloor Tr \rfloor}} \sum_{t=1}^{\lfloor Tr \rfloor} \varepsilon_t}_{\substack{\xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,\sigma^2) \\ \text{as } T \to \infty \text{ by C.L.T.}}} .$$

同时，由 Riemann 积分的定义和 $x_0 = a\sqrt{T}$ 可知当 $\phi = 1$ 时

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}x_{t-1} - \frac{1}{\sqrt{T}}x_0\right) = \int_0^1 \sqrt{T}\left[y_T(r) - x_0\right] dr = \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{\lfloor Tr \rfloor}}{\sqrt{T}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\lfloor Tr \rfloor}}\sum_{t=1}^{\lfloor Tr \rfloor}\varepsilon_t\right) dr \xrightarrow{d} \int_0^1 \sigma W(r) dr,$$

所以

$$\frac{1}{T}\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T} x_{t-1} \xrightarrow{d} \int_0^1 \sigma W(r) dr + a.$$

进一步有

$$\begin{aligned} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}x_{t-1} - \frac{1}{\sqrt{T}}x_0\right)^2 &= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}x_{t-1}\right)^2 - 2\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}x_{t-1}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{T}}x_0\right) + \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}x_0\right)^2 \\ &= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}x_{t-1}\right)^2 - 2a\underbrace{\frac{1}{T}\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}x_{t-1}}_{\xrightarrow{d}\int_0^1 \sigma W(r)dr + a} + a^2 \\ &= \int_0^1 \left[\sqrt{T}x_T(r)\right]^2 dr \\ &\xrightarrow{d} \int_0^1 \sigma^2 W^2(r) dr, \end{aligned}$$

所以，

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}x_{t-1}\right)^2 \xrightarrow{d} \int_0^1 \sigma^2 W^2(r) dr + 2a\left(\int_0^1 \sigma W(r) dr + a\right) - a^2.$$

当 $\phi = 1$ 时

$$x_T = x_0 + \sum_{t=1}^{T} \varepsilon_t,$$

且

$$x_t^2 = x_{t-1}^2 + \varepsilon_t^2 + 2x_{t-1}\varepsilon_t, \quad \forall\, t \geqslant 1.$$

对上式两边同时从 1 到 T 求和有

$$x_T^2 = x_0^2 + \sum_{t=1}^{T} \varepsilon_t^2 + 2\sum_{t=1}^{T} x_{t-1}\varepsilon_t.$$

因此,

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{T} x_{t-1}\varepsilon_t &= \frac{1}{2}\left(x_T^2 - x_0^2 - \sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x_0 + \sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t\right)^2 - \frac{1}{2}x_0^2 - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t^2, \qquad (\dagger)
\end{aligned}$$

在 $(\dagger)$ 两边同时乘以 $\frac{1}{T}$，并注意到

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{T}}\left(x_0 + \sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t\right) &\xrightarrow{d} a + \sigma\mathcal{N}(0,1) \quad \text{(C.L.T.)} \\
\frac{1}{T}\left(x_0^2\right) &= \frac{1}{T}a^2 T = a^2 \\
\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t^2 &\xrightarrow{p} \sigma^2 \quad \text{(L.L.N.)}
\end{aligned}$$

所以

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_{t-1}\varepsilon_t \xrightarrow{d} \frac{1}{2}\left[(a + \sigma\mathcal{N}(0,1))^2 - a^2 - \sigma^2\right]. \qquad (\dagger')$$

综上所述

$$T\left(\hat{\phi} - 1\right) = \frac{(1/T)\sum_{t=1}^{T} x_{t-1}\varepsilon_t}{(1/T^2)\sum_{t=1}^{T} x_{t-1}^2} \xrightarrow{d} \frac{N}{M}, \qquad (1)$$

其中,

$$\begin{aligned}
N &= \frac{1}{2}\left[(a + \sigma\mathcal{N}(0,1))^2 - a^2 - \sigma^2\right], \\
&= \frac{\sigma^2}{2}\left\{[W(1)]^2 - 1\right\} + a\sigma W(1) \\
M &= \int_0^1 \sigma^2 W^2(r)dr + 2a\left(\int_0^1 \sigma W(r)dr + a\right) - a^2 \\
&= \int_0^1 \sigma^2 W^2(r)dr + 2a\sigma\int_0^1 W(r)dr + a^2
\end{aligned}$$